د. مجيد الكرخي

التحليل الكمي الاقتصادي

3

العلاقات غير الخطية - التكامل



بسم الـلـه الرحمن الرحيم

التحليل الكمي
الاقتصادي

الجزء الثالث

العلاقات غير الخطية -التكامل

الطبعة الأولى

١٤٣٤هـ - ٢٠١٤م



دار المناهج للنشر والتوزيع

عمان، شارع الملك حسين، بناية الشركة المتحدة للتأمين

هاتف 465 0624 فاكس 0664 465 6 9626+

ص.ب 215308 عمان 11122 الأردن

Dar Al-Manahej
Publishers & Distributor

Amman-King Hussein St.
Tel 4650624 fax +9626 4650664
P.O.Box: 215308 Amman 11122 Jordan
www.daralmanahej.com
info@daralmanahej.com
manahej9@hotmail.com

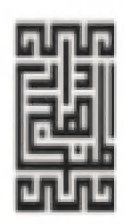
التحليل الكمـي
الاقتصادي

الجزء الثالث

العلاقات غير الخطية -التكامل

تأليف

د. مجيد الكرخي



المحتويات

الفصل الأول

التكامل

الفصل الثاني

التكامل وتطبيقاته الاقتصادية

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية وبعض التطبيقات الاقتصادية

الجزء الثالث

الفصل الخامس

معادلات الفروق

الفصل السادس

معادلات الفروق والنماذج الاقتصادية

الفصل السابع

البرمجة غير الخطية

الجزء الثالث

مقدمة

تقدم التحليلات الكمية لمجمل الظواهر الاقتصادية وصفا دقيقا للمشكلة إذا ما أحكمت متطلباتها ابتداءً من مضبوطية البيانات المستخدمة وصولا إلى حسن الأسلوب التحليلي ومن ثم مدى قدرة متخذ القرارات في توظيف الاستنتاجات المستخلصة .

لقد برزت أهمية التحليلات الكمية في علم الاقتصاد منذ بضعة قرون ولكنها تبلورت وتعمقت خلال القرن الماضي وخاصة الرياضية والإحصائية منها ولهذا صار من الضروري على دارسي علم الاقتصاد والمهتمين بالشؤون الاقتصادية إيلاء التحليلات الكمية المذكورة اهتماماً خاصاً حيث لم تعد المقالات الوصفية البحتة التي تقوم على سرد غير موثق بالمعلومات والوسائل الكمية قادرة على الإحاطة بطبيعة الظاهرة وعناصرها وقوانين حركتها تمهيدا لمعرفة اتجاهاتها والمؤثرات التي تتحكم بها.

وقد حاولنا في هذا الكتاب أن نقدم شيئا من التحليلات الكمية الاقتصادية بأسلوبها الرياضي المبسط ومن هنا جاءت تسمية الكتاب (بالتحليل الكمي الاقتصادي) تلك التسمية التي اشتقت من (الكم ولكمية)والتي تعني كما يفهمها القارئ الكريم استخدام الشروح الكمية (الرياضية) للعلاقات والتشابكات الاقتصادية سواء ما يتعلق بها بالاقتصاد الكلي أو الاقتصاد الجزئي .. ولم تكن أمامنا فرصة التوسع الكثير في هذا المجال لان الوسيلة والغاية كانتا متلازمتين عند دراسة موضوع كهذا فلم نتمكن الدخول إلى التكميم مباشرة بسبب الحاجة لاستكمال جوانب من

المعرفة الرياضية لدى البعض من الإداريين والباحثين المبتدئين كما لم نتمكن من الأطناب في شرح التحليلات الرياضية البحتية خوفا من تحول الموضوع إلى كتاب في الرياضيات ولهذا سعينا التوفق بين الحاجتين والموازنة بينهما واعتمدنا أسلوب نتمنى أن يرضى القارئ وذلك باستعراض التحليل الرياضي أولا ومن ثم عرض التطبيقات الاقتصادية الكمية بعدئذ أي قدمنا الوسيلة الرياضية كي تكون مفهومة عند استخدامها في التكميم الاقتصادي اللاحق.

وقد حرصنا على أن تكون التحليلات الرياضية متدرجة فبدأنا بالمبادئ الأولية والعلاقات الخطية والتي شملت الدول الخطية والمصفوفات وجداول المستخدم المنتج والبرمجة الخطية والتي احتواها الجزء الأول من الكتاب أما العلاقات غير الخطية والتي شملت الدول غير الخطية ومبادئ التفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية ومعادلات الفروق فقد وضعت في الجزء الثاني.

والنقطة الأخرى التي راعيناها هي الابتعاد عن التحليلات الرياضية المعقدة والاتجاه نحو التبسيط والاستعانة بالشروح التوضيحية الضرورية لخلق حالة الفهم التي يرجوها القارئ الذي لم يسبق له دراسة الرياضيات العامة كما لجأنا في سبيل تحقيق ذلك إلى مزيد من الأمثلة التي نراها الوسيلة الأكثر فائدة في تحقيق حالة الفهم المذكورة فهي إحدى وسائل التعلم عن طريق العمل التي أثبتت جداولها في المجالات التعليمية.

وبعد كل فصل رياضي عرضنا بعض القضايا الاقتصادية الأكثر شيوعا مستعينين في عرضها بالتحليلات الرياضية التي سبقتها وهكذا تصاعدت عملية العرض والتحليل فبدأنا بالعلاقات الاقتصادية البسيطة التي يمكن أن تشكل دالة خطية وبينا كيفية تمثيلها بالرسم البياني ومن ثم حلها رياضيا وصولا لتحديد الكميات الاقتصادية من

عرض وطلب وتكاليف وإنتاج واستهلاك وصادرات واستيراد ونقاط تعادل وغيرها . ثم انتقلنا بعدئذ إلى الدول الاقتصادية غير الخطية أو ما يسمى بالمنحنيات وهي الصورة الأخرى للدول الاقتصادية الخطية ومن ثم تعرضنا للتفاضل والتكامل وتطبيقاتهما في التحليلات الكمية الاقتصادية ذات العلاقة بالاقتصاد الكلي أو في نماذج النمو الاقتصادي وغيرها ، كذلك الحال بالنسبة لمعادلات الفروق التي استخدمت في عرض بعض النماذج الرياضية أيضا. أما المصفوفات الجبرية فقد استخدمت في تحليلات المستخدم - المنتج واستعمالاته في عرض التشابك الاقتصادي والتنبوء في المتغيرات الاقتصادية الكلية في حسابات الدخل القومي كذلك استخدمت المصفوفات في شرح البرمجة الخطية وحلولها واستخداماتها الاقتصادية .

ونحن إذ تغمرنا السعادة في تقديمنا شيئا متواضعا في مجال الاقتصاد الكمي نشعر في نفس الوقت بأن هناك مجالات رحبة كثيرة في هذا الموضوع لم يسعفنا الحظ في التطرق إليها كما نلتمس العذر عن أي سهو أو خطأ حدث دون أن نلتفت إليه تاركين للقارئ اللبيب أمر تصحيحه وكم نكون ممتنين لو نبهنا عنه لا مكان تلافيه في الطبعات اللاحقة . شاكرين الله سبحانه وتعالى الذي وفقنا على وضع هذا الكتاب فله الفضل كله وبه نستعين.

المؤلف

الفصل الأول

التكامل

Integration



التكامـــل

Integration

1-1 تعريف

يعرف التكامل بأنه العمليات المعاكسة للتفاضل أي إيجاد دالة يكون معدل تغيرها معلوماً ، كما أنه يعرف بالطريقة التي تحدد المساحة تحت المنحنى.

ولما كان التكامل عكس التفاضل فأن تكامل أي دالة تفاضلية هو الدالة الأصلية ما عدا المقدار الثابت. ومن ذلك يمكن القول بأن التكامل هو الأسلوب الذي نجد بواسطته الدالة عندما تكون مشتقتها معلومة.

ومن جهة أخرى فإن التكامل هو حساب القيمة النهائية لمجموعة الحدود (المقادير) حين يزداد عدد هذه الحدود إلى ما لانهاية وعندما تقترب القيمة لكل حد من الصفر. أي أن التكامل هو كيفية إيجاد المساحة تحت المنحنى. وقد استخدم الرياضيون الأوائل الرمز (S) للإشارة إلى عمليات التكامل وكما هو واضح أن هذا الرمز مشتق من كلمة مجموع (sum) أي مجموعة الحدود التي ما لانهاية لها المذكورة أعلاه.

الفصل الأول

1-2 التكامل غير محدد Indefinite Integration

إذا كانت (x) هي تكامل الدالة f (x) بالنسبة إلى x فأن العلاقة بينهما يمكن وضعها بالصورة التالية:-

$$\int f(x)dx = F(x) + c \qquad (1-1)$$

حيث يقرأ الطرف الأيسر: تكامل دالة xبالنسبة x أما c فهو العدد الثابت من عملية التكامل.

في حين يسمى المقدار $F(x)+c$ بالتكامل غير المحدد وسبب ذلك أن مشتقة الحد الثابت هي صفر ولا تعرف قيمة هذا الحد حين أجراء تكامل مشتقة معينة فقد تأخذ (C) أية قيمة ولهذا سمي بالتكامل غير المحدد.

ومن ذلك نستدل على أنه: إذا كانت $F(x)$ تكامل الدالة $f(x)$ فإن كل تكاملات $f(x)$ تقع ضمن المجموعة $F(x)+c$ حيث أن (c) أي مقدار ثابت . ولهذا تعطي في كثير من تطبيقات التكامل معلومات في أصل المسألة تحدد قيمة المقدار الثابت وتسمى: (الشرط الابتدائي : Initial Condition) .

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال الآتي :-

ما هو تكامل مشتقة الدالة x الآتية : $f(x)=2x-2$

الجواب :

يستخرج تكامل هذه الدالة عن طريق عكس عمليات التفاضل كالآتي:

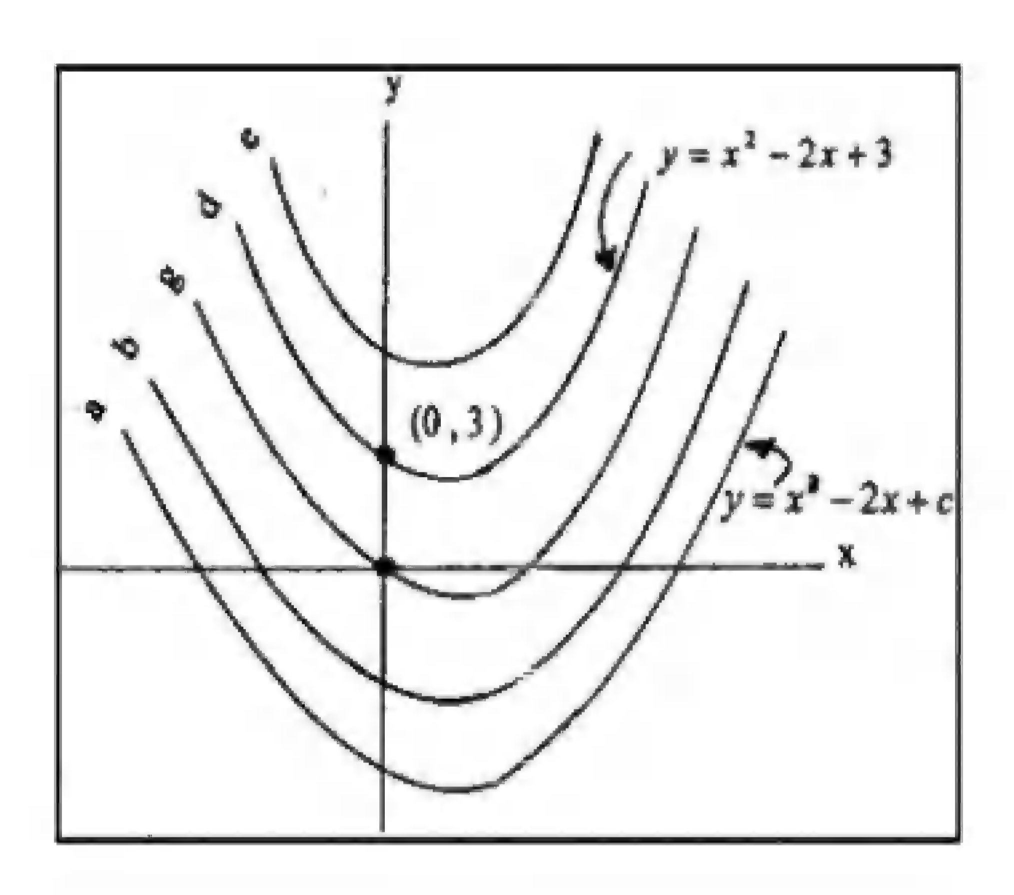
$$\int(2x-2)dx$$
$$=\int 2xdx-2dx$$
$$=x^2-2x+c$$

ويلاحظ لأجل التدقيق بأن :

$$\frac{d}{dx}(x^2-2x+c)=2x-2$$

وحيث أن c تأخذ قيماً غير محددة لذا يمكن تمثيل الدالة $y=x^2-2x+c$ بمجموعة من المنحنيات ذات القطع المتكافئ يختلف كل منحنى عن الأخر باختلاف قيمة c. كما يظهر في الشكل (1-1) أدناه :-

الجزء الثالث



شكل رقم (1-1)

ويلاحظ بأن النقطة (0,3) تمثل بالمنحنى (d) حيث الدالة $y = x^2 - 2x + 3$ وفيها $y = 3$ عندما تكون $x = 0$, $c = 3$ وهكذا بالنسبة لبقية المنحنيات في العائلة حيث أن كل منحنى فيه c تساوي قيمة معينة عندما $x = 0$ ففي المنحنى g يظهر أن $y = 0$ عندما $x = 0, c = 0$.

والمحنى (a) تكون فيه $y = -5$ عندما $x = 0, c = -5$ أي معادلة المنحنى (a) هي :

$$y = x^2 - 2x - 5$$

وهكذا بالنسبة لبقية المنحنيات .

1-3 قواعد التكامل

إن قواعد التكامل ما هي إلا معكوس قواعد التفاضل والتي نتناول بعضها في هذه الفقرة على أن نأتي على البعض الآخر في الفقرات اللاحقة :

1- $\int dx = x + c$

2- $\int c\,dx = c\int dx$

3- $\int (du+dv) = \int du + \int dv$

حيث أن $u = f(x), v = g(x)$ وهي دوال تفاضلية بالنسبة للمتغير x.

4- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

5- $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

حيث أن $u = f(x)$ وهي دالة تفاضلية بالنسبة للمتغير x.

6- $\int \frac{1}{u} du = \ln u + c$

وفي حالة كون $u = x$ فإن $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$

أمثلة

1- $\int (3x^2+2)dx = \frac{3x^{2+1}}{2+1} + 2x + c$

$= x^3 + 2x + c$

إن هذا المثال يوضح لنا تطبيق القواعد (1،2،3،4).

2- $\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$ القاعدة (5)

3- $\int (2x^3+3)^2 x^2 dx$

نفرض أن : $u = 2x^3 + 3$ وأن $du = 6x^2 dx$

وبذلك يكون لدينا: $\frac{1}{6}du = x^2dx$

$$\int (2x^3+3)^2 x^2 dx = \int u^2 \left(\frac{1}{6}\right) du$$ القاعدة (5)

$$\frac{1}{6}\int u^2 du = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)u^3 + c$$ القواعد (4,2,1)

$$= \frac{1}{18}(2x^3+3)^3 + c$$

$$= \frac{(2x^3+3)^3}{18} + c$$

-4 $\int 5xdx = 5\int xdx = 5(\frac{1}{2}x^2 + c)$ (القاعدة 2)

-5 $\int \frac{1}{x+2}dx$

نفرض أن: $u = x+2$

$$\therefore du = dx$$

$$\therefore \int \frac{1}{x+2}dx = \int \frac{1}{u}du$$

$$= \ln u + c$$

$$= \ln(x+2) + c$$ (القاعدة 6)

-6 $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$ (نستخدم القاعدة3)

$\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$ (القاعدة 3)

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{1-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+c$$

-7 $\int(2x+3)dx$

$=\frac{2x^{1+1}}{1+1}+3x+c$ (القاعدة 3)

$=x^2+3x+c$

-8 $\int\sqrt{2+5x}dx$ نفرض أن : $u = 2 + 5x$

و $du=5dx$ $\therefore \frac{1}{5}du=dx$

والآن :

$\int(2+5x)^{\frac{1}{2}}dx=\int u^{\frac{1}{2}}\frac{1}{5}du=\frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}du$ (القاعدة 5,2)

$$=\left(\frac{1}{5}\right)\frac{2}{3}(2+5x)^{\frac{3}{2}}+c$$

$$=\frac{2}{15}(2+5x)^{\frac{3}{2}}+c$$

-9 جد معادلة المنحنى ذو الانحدار $\frac{dy}{dx}=(x+1)(x+2)$

والذي يمر من النقطة (2,4) .

الجزء الثالث

<u>الجواب :</u>

$$\int (x+1)(x+2)dx$$
$$= \int (x^2+3x+2)dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + c$$

(القاعدة 3)

أما المنحنى y الذي يمر بالنقطة (2,4) فأن النقطة تشير إلى أن:

x = 2,y = 4 وبالتعويض في المعادلة أعلاه نحصل على :

$$4 = \frac{1}{3}(2)^3 + \frac{3}{2}(2)^2 + 2(2) + c$$
$$4 = \frac{8}{3} + \frac{12}{2} + 4 + c$$
$$\therefore c = -\frac{26}{3}$$

إذن معادلة المنحنى التي تمر بالنقطة (2,4) هي :-

المنحنى = $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{26}{3}$

تمارين (1-1)

قدر قيمة التكاملات الآتية :

1- $\int x^2 dx$

2- $\int (x+2)(x-1)dx$

3- $\int x^{-3} dx$

4- $\int \frac{6}{x} - 1dx$

5- $\int (4-2x^2)^2 dx$

6- $\int \frac{xdx}{(x-1)^2} dx$

7- $\int (x-3)dx$

8- $\int (2x^3 - x^2 + 4x - 10)dx$

9- $\int x^{2/3} dx$

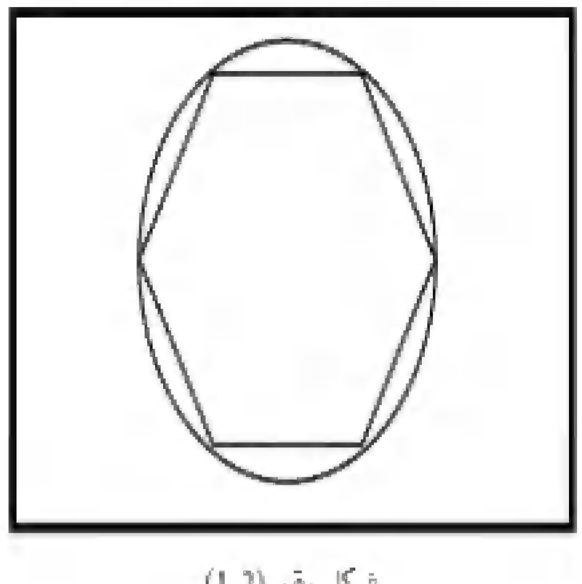
10- $\int \frac{x^{1/3}}{x} dx$

1-4 المساحة تحت المنحنى Area Under the Curve

لقد كانت قضية حساب مساحة الأشكال الهندسية إحدى الأسباب التي أدت إلى تطور حساب التكامل. ففي مبادئ الهندسة تحسب مساحة المستطيل بحاصل ضرب بعديه (الطول × العرض) ومساحة المربع بتربيع ضلعه ومساحة الدائرة بحاصل ضرب مربع نصف قطرها × النسبة الثابتة π ،وكذلك الحال بالنسبة للأشكال الهندسية الأخرى المحددة بقطع من الخط المستقيم. ولكن كيف الحال إذا كان البحث يدور حول إيجاد مساحة الأشكال المحددة بمنحنيات وليس بخطوط مستقيمة.

لقد استفاد الرياضيون من مفهوم النهايات لمعالجة صعوبة إيجاد المساحة تحت المنحنى وقد بدأوا بضرب المثال الآتي :

بافتراض وجود مضلع منتظم (regular polygon) مرسوم داخل الدائرة يراد إيجاد مساحته كما في الشكل رقم (1-2).



شكل رقم (2-1)

إن مساحة هذا المضلع تقارب مساحة الدائرة ولكنها اصغر من مساحة الدائرة بسبب وجود مساحات من الدائرة لم يغطيها المضلع ولكن كلما زادت أضلاع المضلع اقتربت مساحته من مساحة الدائرة.

فإذا رمزنا لمساحة الدائرة بالحرف (A) و مساحة المضلع الذي يتكون من (n) من الأضلاع بالرمز a(n) فإن :-

$$a(n) \to A \text{ as } n \to \infty$$

أي كلما زاد عدد أضلاع المضلع كلما اقتربت مساحته شيئاً فشيئاً من مساحة الدائرة.

والآن دعنا نستخدم مفهوم النهاية في هذا المثال لأجل الوصول إلى تفسير التكامل المحدد كونه المساحة تحت المنحنى. فإذا كانت لدينا قضية إيجاد مساحة محددة بمنحنى موجب مستمر وهو المنحنى : $y = f(x)$ وبحدود أخرى هي : الإحداثي - x والخطين العموديين ($x = a, x = b$). فكيف تحتسب هذه المساحة؟

لننظر إلى الشكل رقم (3-1) ونتابع الموضوع :

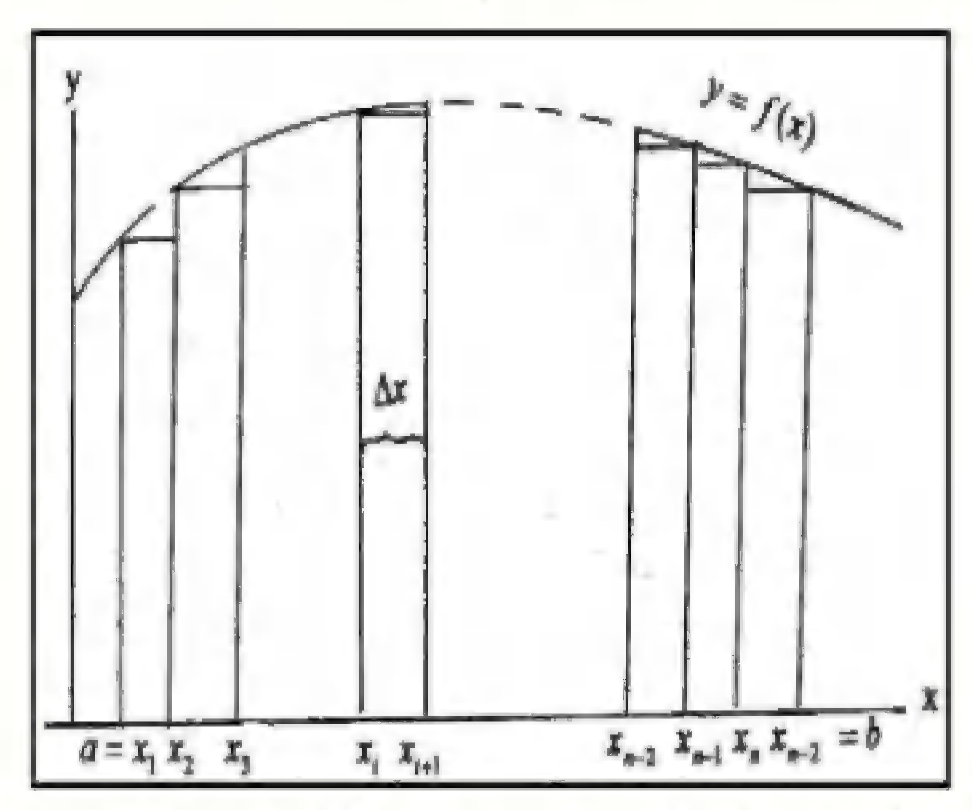
يتم حساب هذه المساحة بتقسيم القاعدة (a , b) إلى (n) من المساحات ونرمز إلى نقاط التقسيم بالرموز:

$a = x_1, x_2, \ldots x_n, x_{n+1} = b$ أما طول كل مسافة من المسافات الجزئية:

وتمثل Δx عرض المستطيلات التي تكونت تحت $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i ,(i = 1,2,\ldots n)$ المنحنىy وبذلك تكون مساحة كل مستطيل تحت المنحنى كما يلي :-

$$f(x_1)\Delta x_1, f(x_2)\Delta x_2, \ldots, f(x_n)\Delta x_n$$

وإن مجموع هذه المساحات : $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$ (1-2)



والآن أذا زدنا عدد المستطيلات بزيادة (n) إلى ما لا نهاية أي $(n \to \infty)$ فهذا يؤدي إلى زيادة عدد Δx بحيث تدنو مسافة (عرض) كل واحد منها من الصفر وبذلك فأن المساحة تحت المنحنى والمحصورة ما بين (a,b) والتي لم تغطيها المستطيلات سابقاً سوف تنخفض بل أنها تقترب من الصفر وبهذا نستنتج :

إن المساحة (A) المحددة بدالة موجبة مستمرة $y = f(x)$ و الإحداثي x وإحداثيين ثابتين : $x = a , x = b$ تحسب بالصيغة التالية :

$$A = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \qquad (1\text{-}3)$$

وإن f(x) تسمى دالة تكاملية للمسافة (a,b) ويمكن توضيحها بالآتي :-

$$A = Area = \lim_{\substack{n \to \infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

$$= \int_a^b f(x)dx \qquad (1\text{-}4)$$

وتقرأ تكامل من a إلى b للدالة f(x)dx. وتسمى هذه العملية بعملية التكامل بين نهايتين (a) النهاية الدنيا و (b) النهاية العليا.

1-5 التكامل المحدد Definite Integration

يلاحظ عند الحساب $\int_a^b f(x)dx$ لم يظهر الحد الثابت (c) لان التكامل أصبحت له قيمة محددة أي بين النهايتين (a , b) وبسبب ذلك سمي بالتكامل المحدد (Definite integral) للدالة $f(x)$ من a إلى b . وجبرياً يتم التخلص من الثابت (c) نتيجة طرح الحد الأدنى للدالة (a) من الحد الأعلى لها (b) فإذا كان تكامل g(x) هو :

الفصل الأول

$$\int g(x)dx = f(x) + c$$

فحينما تكون x = b فإن قيمة التكامل تكون f(b)+c . وحينما تكون قيمة x = a فإن قيمة التكامل تكون f(a)+c وبالطرح ينتج :

$$[f(b)+c]-[f(a)+c]$$

$$(1\text{-}5) \qquad = f(b) - f(a)$$

(وهكذا فقد تلاشى الثابت c)

ويرمز للصيغة المذكورة في (1-4) أعلاه بالآتي :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b g(x)dx$$

ويكتب ناتج التكامل كالآتي :-

$$f(x)]_b^a \qquad (1-6)$$

وسنعتمد الخط القائم (|) بدلاً من ( ]) في الإشارة إلى ذلك .

وللتكامل المحدد الخصائص الآتية :-

1- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

2- $\int_a^a f(x)dx = 0$

3- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

حيث أن : $b \ge c \ge a$

لنأخذ بعض الأمثلة:

أمثلة

جد قيمة المساحة تحت المنحنى في المسافة المحددة في كل من المسائل التالية :-

-1

$$\int_0^{10} f(x)dx = \int_0^{10} xdx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^{10}$$

$$= \frac{(10)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2}$$

$$= 50$$

-2
$$\int_{2}^{3} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_2^3$$
$$= \frac{(3)^3}{3} - \frac{(2)^3}{3}$$
$$= \frac{27}{3} - \frac{8}{3}$$
$$= \frac{19}{3}$$

-3
$$\int_{1}^{25} x^{\frac{-1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_1^{25}$$
$$= 2(25)^{\frac{1}{2}} - 2(1)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 10 - 2$$
$$= 8$$

-4
$$\int_{2}^{4} 6x dx = 6\frac{x^2}{2}\Big|_2^4$$
$$= 3x^2\Big|_2^4$$
$$= 3(4)^2 - 3(2)^2$$
$$= 36$$

-5
$$\int_{-1}^{1} (1 + x + 10x^4) dx = x + \frac{x^2}{2} + 10\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1}$$
$$= x + \frac{1}{2}x^2 + 2x^5\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\left[(1)+\frac{1}{2}(1)^2+2(1)^5\right]-\left[(-1)+\frac{1}{2}(-1)^2+2(-1)^5\right]$$

$$=\left[1+\frac{1}{2}+2\right]-\left[-1+\frac{1}{2}-2\right]$$

$$=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=6$$

-6

$$\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\,dx=\left.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_1^4$$

$$=\left.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right|_1^4$$

$$=\left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}+2(4)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[\frac{2}{3}(1)^{\frac{3}{2}}+2(1)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\frac{28}{3}-\frac{8}{3}=\frac{20}{3}$$

ويمكن استخدام الخاصية (3) في الحل وبعد تكييف المقدار وكما يأتي :

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^2+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_2^4$$

$$=\left[\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}}+2(2)^{\frac{1}{2}}\right]-\left[\frac{2}{3}+2\right]+\left[\frac{28}{3}\right]-\left[\frac{2}{3}(2)^{\frac{3}{2}}+2(2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

قيمة الحد الثالث ماخوره من أعلاه ويحذف الحد الأول مقابل الحد الرابع ينتج:-

$$\frac{28}{3}-\frac{8}{3}=\frac{20}{3}$$

(وهي نفس النتيجة)

-7 $\int_1^5 x(x^2-4)^2 dx$

نفرض أن :

$$u = x^2 - 4 \quad , \quad du = 2xdx$$

$$\therefore \frac{1}{2}du = xdx$$

$$\therefore \int_1^5 x(x^2-4)^2 dx = \int_1^5 u^2 \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\frac{u^3}{3}\Big|_1^5$$

$$= \frac{(x^2-4)^3}{6}\Big|_1^5 = \frac{(5^2-4)^3}{6} - \frac{(1^2-4)^3}{6}$$

$$= \frac{9261}{6} - \left(\frac{-27}{6}\right)$$

$$= \frac{9288}{6} = 1548$$

وحسب الخاصية رقم (1) فان :

$$\int_1^5 x^2(x-4)^2 dx = -\int_5^1 x(x^2-4)^2 dx$$

$$(\text{من الناتج أعلاه}) = -\left(-\frac{27}{6} - \frac{9261}{6}\right)$$

1548 = وهي نفس النتيجة .

1-6 المساحة السالبة Negative Area

لدى عرض مفهوم التكامل كما في (1-4) :

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

فقد افترضنا أن الدالة f (x) مستمرة موجبة ما بين (a , b) أما إذا كانت f (x) سالبة أي أن المنحنى y = f (x) يقع تحت الإحداثي -x ما بين (a , b) فتصبح قيمة التكامل سالبة لكون المساحة تحت المحور -x هي مساحة سالبة أما القيمة المطلقة للمساحة المحصورة بين المنحنى المحور -x والعمودين (a , b) فتحسب بالصيغة التالية :

$$\text{Total Area} = \sum(positive \quad Area) - \sum(Negative \text{ Areas})$$

$$A = \sum A^{+} - A^{-}$$

أي أن المساحة الكلية ما هي إلا القيمة المطلقة للتكامل ولهذا فهي دائما ذات قيمة موجبة .

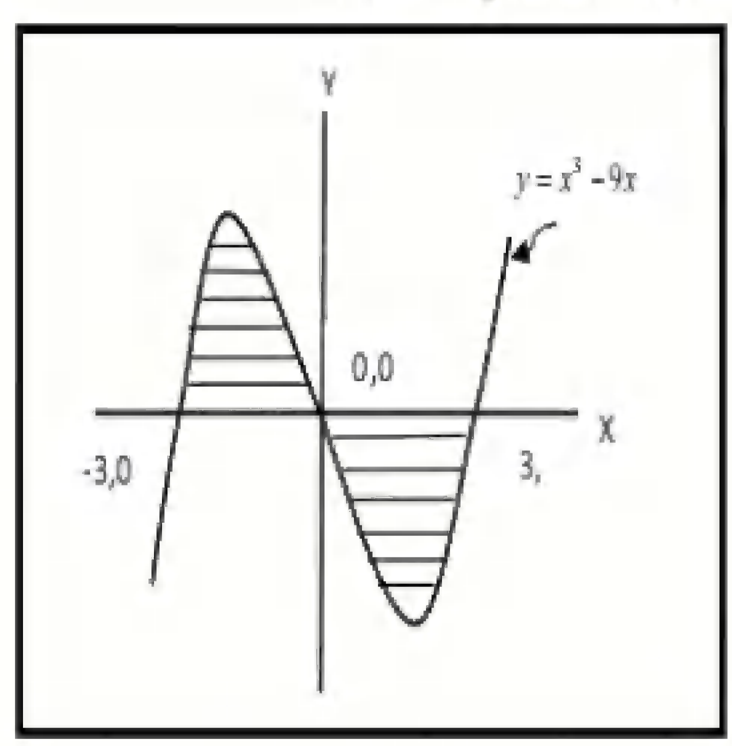
مثال (1) :

احسب المساحة المحددة بالمنحنى الآتي والمحور $X-$:

$$y = x^3 - 9x$$

الجواب :

عند رسم المنحنى f(x) يظهر كما في الشكل (1-4)



شكل رقم (1-4)

ويلاحظ أن المساحة محصورة بين المحور -x و $x = 3, x = -3$ كما يمكن معرفة قيمة x بدون اللجوء إلى الرسم وذلك عندما y=0 فإن :

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x-3)(x+3) = 0$$

$x = -3$ أو $x = 3$ اما

إذن المساحة الكلية تساوي :

$$A \sum A^+ - \sum A^-$$

$$A = \int_{-3}^{0} (X^3 - 9X)dx - \int_{0}^{3} (X^3 - 9X)dx$$

$$= \left(\frac{X^4}{4} - \frac{9X^2}{2} \right) \Bigg|_{-3}^{0} - \left(\frac{X^4}{4} - \frac{9X^2}{2} \right) \Bigg|_{0}^{3}$$

$$= \left[(0) - \left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) \right] - \left[\left(\frac{81}{4} - \frac{81}{2} \right) - (0) \right]$$

$$= \frac{81}{4} - \left(-\frac{81}{4} \right) = \frac{81}{2}$$

1-7 المساحة ما بين منحنين Area Between Two Curves

كثيراً ما تكون هناك حاجة لحساب قيمة المساحة بين المنحنين:

$y_2 = g(x)$ ، $y_1 = f(x)$ وبين العمودين x=a , x=b بشرط أن :

$$f(x) \le g(x)$$

أي أن المنحنى (f (x يقع تحت المنحنى (g (x كما أن : $a \le x \le b$

حيث يجري حساب المساحة كالآتي:

$$A = \int_{a}^{b} [g(x) - f(x)]dx$$

<u>مثال :</u>

أوجد المساحة المحددة بالمحنين : $y = -x$ ، $y = x - x^2$

الحل:

نجد أولا نقاط تقاطع المنحنين :

لدينا : $x-x^2=-x$

$$\therefore x-x^2+x=0$$

$$x(2-x)=0$$

اما $x=0$ او $x=2$

فإذا كانت x = 0 فان y = 0

وإذا كانت x = 2 فان y = -2

لذلك فإن :

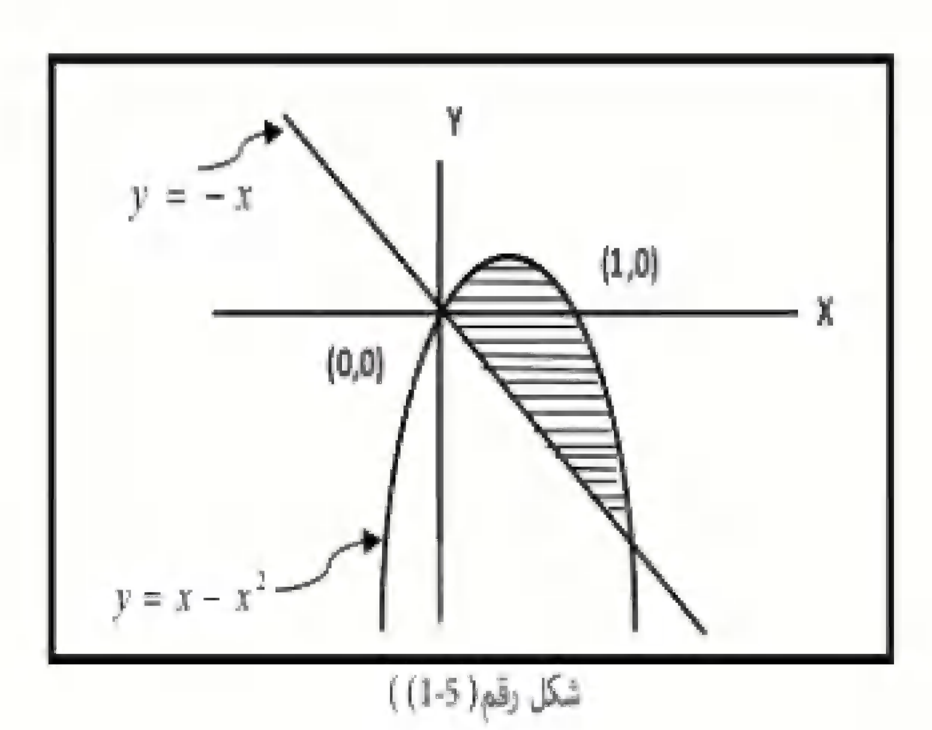
$$A=\int_0^2\left[x-x^2-(-x)\right]dx$$

$$=\int_0^2(2x-x^2)dx$$

$$=x^2-\frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$=\left(4-\frac{8}{3}\right)-(0)$$

$$\therefore A=\frac{4}{3}$$



شكل رقم((1-5))

تمارين (2-1)

أحسب قيمة التكاملات الآتية :

-1 $\int_{-2}^{1}(x+1)^2\,dx$

-2 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{(x+2)^3}$

-3 $\int_{1}^{3}(x^2+4)dx$

-4 $\int_{3}^{5}\frac{x^2}{(x-1)}dx$

-5 $\int_{-2}^{1}(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\,dx$

-6 $\int_{-1}^{2}(3x^3+x^2-5x)dx$

-7 جد المساحة بين المنحنيين :

$$y=(x-1)^2$$

$$y=x^2-x-2$$

-8 جد المساحة بين المنحنيين :

$$y=x^3-2x^2-5x$$

$$y=-4x$$

1-8 الصيغ الأساسية للتكامل Standard Forms Of Integration

يتميز التكامل على العكس من التفاضل بصعوبته وذلك لعدم وجود قواعد عامة تحكم حساباته رغم أن الكثير من قواعده تستمد من قواعد التفاضل نفسه .

ولغرض تسهيل حساب التكامل لكثير من المسائل التي قد تواجهنا ندرج في أدناه لصيغ التالية والتي ورد ذكر البعض منها سابقا ، وقد نظمت هذه الصيغ حسب بعض الخصائص لتسهيل مهمة العودة إليها .

الصيغ الأولية:

-1 $\int dx = x + c$

-2 $\int c dx = c \int dx$

-3 $\int (du + dv) = \int du + \int dv$

حيث أن u = f (x) , v = f (x) وهما دوال تفاضلية بالنسبة لـ x .

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , \quad n \neq -1$$
$$= \ln x + c \quad , \quad n = -1$$

-4 $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} = c$

حيث أن u = f (x)

-5 $\int \frac{1}{u} du = \ln u + c$ حيث ان $u = f(x)$

-6 $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln u} + c$ حيث ان $u = f(x)$

-7 الصيغ التي تحتوي على (a + b x)

-8 $\int (a+bx)^n dx = \frac{1}{b(n+1)} (a+bx)^{n+1} + c$

الجزء الثالث

إذا كانت $n \neq -1$

و $= \frac{1}{b}\ln(a+bx)+c$

إذا كانت $n=-1$

-9 $\int x(a+bx)^n dx = \frac{1}{b^2(n+2)}(a+bx)^{n+2} - \frac{a}{b^2(n+1)}(a+bx)^{n+1}+c$

إذا كانت $n \neq -1,-2$

$$= \frac{1}{b^2}\left[a+bx-a\ln(a+bx)\right]=c$$

إذا كانت n = -1

$$= \frac{1}{b^2}\left[\ln(a+bx)+\frac{a}{a+bx}\right]+c$$

إذا كانت n = -2

الصيغ التي تحتوي على $a^2 \pm x^2$ أو $x^2 \pm a^2$

-10 $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln(\frac{x-a}{x+a})+c$

-11 $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln(\frac{a+x}{a-x})+c$

-12 $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2\ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right]+c$

-13 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = \ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}+c$

-14 $\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}+c$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + c \quad -15$$

$$\int x\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2 - x^2)^3} + c \quad -16$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} + c \quad -17$$

<u>الصيغ الأسية:</u>

$$\int a^u dx = \frac{a^u}{b(\ln a)} + c \quad -18$$

$$\int e^u dx = \frac{e^u}{b} + c \quad -19$$

$$\int x e^u dx = \frac{e^u}{b^2}(bx - 1) + c \quad -20$$

حيث أن $u=f(x)$ في الصيغ (18, 20,19) و (b) هو معامل (x) .

<u>الصيغ اللوغارتيمية</u>

$$\int (\ln x) dx = x(\ln x) - x + c \quad -21$$

$$\int x(\ln x) dx = \frac{x^2}{2}(\ln x) - \frac{x^2}{4} + c \quad -22$$

$$\int \frac{1}{x(\ln x)} dx = \ln(\ln x) + c \quad -23$$

$$\int (\ln x)^2 dx = x(\ln x)^2 - 2x(\ln x) + 2x + c \quad -24$$

$$\int \ln(ax) dx = x(\ln ax) - x + c \quad -25$$

-26

ولغرض الوقوف على تطبيقات هذه الصيغ دعنا نتناول بعض الأمثلة :

أمثلة

أوجد تكامل ما يأتي:

-1 $\int (2+3x)^5 dx$ نطبق الصيغة (8)

بما أن a=2 , b=3 ,n=5

$$\therefore \int (a+bx)^n dx = \frac{1}{b(n+1)}(a+bx)^{n+1}+c$$

$$=\frac{1}{3(6)}(2+3x)^6+c$$

$$=\frac{1}{18}(2+3x)^6+c$$

-2 $\int a^{2x-1}dx$ تطبق الصيغة (18)

بما أن b=2 , u=2x-1

$$\therefore \int a^u dx = \frac{a^u}{b(\ln a)}+c=\frac{a^{2x-1}}{2(\ln a)}+c$$

-3 $\int 5^{4x}dx$ نطبق الصيغة (18)

بما أن a=5 , b=4 , u=4x

$$\therefore \int \frac{a^u}{b(\ln a)}+c=\frac{5^{4x}}{4(\ln 5)}+c$$

-4 $\int x^4 dx=\frac{x^{4+1}}{4+1}+c=\frac{x^5}{5}+c$ نطبق الصيغة (4)

5- $\int 4x^3 dx = 4\int x^3 dx$ تطبق الصيغة (2،4)

$= 4(\frac{x^4}{4} + c)$

$= x^4 + c$

6- $\int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx$ تطبق الصيغة (4)

$= \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + c$

$= \frac{x^{-3}}{-3} + c$

$= -\frac{1}{3x^3} + c$

7- $\int x\sqrt{1+x^2}\, dx$ نطبق الصيغة (14)

$dx = \int (1+x^2)^{1/2}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} + c$

$= \frac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} + c$

8- $\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x^2}}$

نفرض أن: $u = 1 + 3x^2 \quad \therefore du = 6x\,dx$

$\frac{1}{6} du = x\,dx$ ثم نطبق الصيغة (4)

$$\int_0^4 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+3x^2}} = \int_0^4 \frac{\frac{1}{6}du}{u^{1/2}} = \frac{1}{6}\int_0^4 u^{-1/2}du = \frac{1}{6}(2)u^{1/2}\Big|_0^4$$

$$= \frac{1}{3}u^{1/2}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}(1+3x^2)^{1/2}\Big|_0^4 = \frac{1}{3}[\{1+3(4)^2\}^{1/2} - \{1+3(0)^2\}^{1/2}]$$

$$= \frac{1}{3}[\sqrt{490} - \sqrt{1}]$$

$$= \frac{1}{3}[7-1]$$

$$= 2$$

9- $\int (\ln x)^2 dx$ تطبق الصيغة (24)

$$= x(\ln x)^2 - 2x(\ln x) + 2x + c$$

10- $\int \frac{1}{1-x}dx$ هذه المسالة من الصيغة (6) $u = f(x) = 1-x$

أي أن $\int \frac{1}{u}du$ وحلها يساوي :

$$\ln u + c$$
$$= \ln(1-x) + c$$

11- $\int \frac{(2x+1)}{x^2+x-1}dx$ نفرض أن: $u = x^2 + x - 1$

$$\therefore \quad du = (2x+1)dx$$

$$\therefore \int \frac{(2x+1)}{x^2+x-1}dx = \int \frac{du}{u} = \int \frac{1}{u}du$$

وبذلك تطبق الصيغة (6) $= \ln u + c = \ln(x^2+x-1) + c$

12- $\int \sqrt{4+3x}\, dx$ وبإعادة الصياغة ينتج :

$\int (4+3x)^{1/2}\, dx$ نفرض أن : $u = 4+3x$

$\therefore \quad du = 3dx$

$\therefore \quad \frac{1}{3}du = dx$

فيكون لدينا :

$$\int (4+3x)^{1/2}\, dx = \int u^{1/2}\, \frac{1}{3}du$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{1/2}\, du = \frac{1}{3}(\frac{2}{3})u^{3/2} + c$$

$$= \frac{2}{9}u^{3/2} + c = \frac{2}{9}(4+3x)^{3/2} + c$$

ويمكن تطبيق الصيغة (8) لنحصل على :

$$\int (4+3x)^{1/2}\, dx = \frac{1}{3(\frac{1}{2}+1)}(4+3x)^{3/2} = \frac{2}{9}(4+3x)^{3/2}$$

حيث أن : $a = 4,\ b = 3,\ n = \frac{1}{2}$

13- $\int (x\sqrt{x}-5)^2\, dx$ وبإعادة الصياغة ينتج:

$$\int (x^{3/2}-5)^2\, dx = x^{9/4} - 10x^{3/2} + 25dx$$

تطبق الصيغة (3) فينتج :

$$= \frac{4}{13}x^{13/4} - 4x^{5/2} + 25x + c$$

الجزء الثالث

14- $\int \frac{(1-2x)^2}{\sqrt{2x}}dx$ وبإعادة الصياغة ينتج :

$$\int \frac{(1-2x)^2}{\sqrt{2}\,x^{1/2}}dx = \int \frac{(1-4x+4x^2)(x)^{-1/2}}{\sqrt{2}}dx$$

$$= \int \frac{x^{-1/2} - 4x^{1/2} + 4x^{3/2}}{\sqrt{2}}dx$$

والآن نطبق الصيغة (3)

$$= \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \frac{4x^{3/2}}{\frac{3}{2}\sqrt{2}} + \frac{4x^{5/2}}{\frac{5}{2}\sqrt{2}} + c$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}} - (\frac{8}{3})\frac{\sqrt{x}x}{\sqrt{2}} + (\frac{8}{5})\frac{\sqrt{x}\,x^2}{\sqrt{2}} + c$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{2}}(1 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{5}x^2) + c$$

15- $\int (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$ بإعادة الصياغة ينتج :

$= \int (x^{1/2} + x^{-1/2})dx$ وبتطبيق الصيغة (3) فينتج :

$$= \frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x^{1/2} + c$$

16- $\int 5x\,dx$ نطبق الصيغة (2 ، 1)

$$= 5\int x\,dx$$

$$= 5\int \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$= \frac{5}{2}x^2 + c$$

17- $\int \frac{1}{x+4}dx$ نطبق الصيغة (6) فينتج :

$$\ln(x+4) + c$$

18- $\int 2x(x^2+3)^2\,dx$ وبإعادة الصياغة ينتج :

$= \int (x^2+3)^3(2x)dx$ نطبق الصيغة (5) :

نفرض أن $u = x^2 + 3$ $du = 2x\,dx$ $\therefore$

والآن :

$$\int (x^2+3)^2(2x)\,dx = \int u^2 du$$

$$= \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(x^2+3)^3 + c$$

تمارين (3-1)

أحسب قيمة التكملات الآتية :

1- $\int xe^{-x}dx$

2- $\int \frac{\cos x dx}{1+\sin x}$

3- $\int \frac{du}{\sin^2 ax}$

4- $\int e^x (x-2)^2 dx$

5- $\int x^n \ln x dx$

6- $\int x \cos x dx$

7- $\int e^{2x^3+x-4} dx$

8- $\int (x^{1/3} + x^{1/2})^2 dx$

9- $\int x \ln x dx$

10- $\int \frac{(x^2+x)dx}{\sqrt{x+1}}$

1-9 التكامل بالأجزاء Integration by parts

نواجه في بعض الأحيان مسالة إجراء تكامل لمقدار مكون من حاصل ضرب دالتين أو مقدار لوغاريتمي يصعب إجراء عملية التكامل مباشرة ولهذا نلجأ إلى تحويل هذا المقدار إلى تركيب آخر (أي تجزئته) يسهل فيه تطبيق الصيغ الأساسية للتكامل عليه. وتسمى عملية التحويل هذه التكامل بالأجزاء .

وتعتمد عملية التكامل بالأجزاء على معكوس عملية تفاضل حاصل ضرب دالتين. فإذا كانت g , h دالتين لمتغير مستقل واحد مثل x فان عملية تفاضل الدالة y (h , g) تتم كالآتي :

$$y = f[g(x).h(x)] = f(g.h)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(gh)$$

$$= g\frac{dh}{dx} + h\frac{dg}{dx}$$

وبإعادة الترتيب ينتج :

$$g\frac{dh}{dx}=\frac{d}{dx}(gh)-h\frac{dg}{dx}$$

وبإجراء التكامل لطرفي المعادلة بالنسبة إلى x نحصل على :

$$(1-7)\quad \int g\frac{dh}{dx}dx=\int\frac{d}{dx}(gh)dx-\int h\frac{dg}{dx}dx$$

وباختصار الرموز ينتج :

$$(1-8)\quad \int g\ dh=gh-\int h\ dg$$

أمثلة

1- جد قيمة التكامل: $\int xe^{2x}\ dx$

الجواب:

لغرض تطبيق (8 - 1) في حل التمرين ليكن :

$g=x\quad ,\quad dh=e^{2x}\ dx$ وعلى هذا الأساس يكون :

$dg=dx$ و $h=\frac{e^{2x}}{2}$ [بعد تكامله حسب الصيغة (19)]

نعيد كتابة المعادلة حسب العلاقة (8 - 1)

$$\int g\ dh=gh-\int h\ dg$$

$$\int xe^{2x}\ dx=x\frac{e^{2x}}{2}-\int\frac{e^{2x}}{2}dx+c$$

$$=\frac{x\ e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{2(2)}+c$$

$$=\frac{e^{2x}}{2}(x-\frac{1}{2})+c$$

الجزء الثالث

وإذا استخدمنا الصيغة (20) سنحصل على نفس النتيجة وهي الأكثر اختصارا ولكن استخدمنا المثال لشرح طريقة التكامل بالأجزاء .

-2 جد تكامل ما يأتي : $\int xe^{x}\, dx$

<u>الجواب :</u>

ليكن $g = x$ ، $dh = e^{x}\, dx$ وعلى هذا الأساس يكون :

$dg = dx$ و $h = \frac{e^{x}}{1} = e^{x}$ [بعد تكامله حسب الصيغة (19)]

$$\therefore \int xe^{x}\, dx = xe^{x} - \int e^{x}\, dx + c$$

$$= xe^{x} - e^{x} + c$$

$$= ex(x-1) + c$$

وهي نفس النتيجة إذا أجرينا التكامل حسب الصيغة (20)

-3 جد تكامل ما يأتي : $\int xe^{-3x}\, dx$

<u>الجواب:</u>

ليكن g=x و $dh = e^{-3x} dx$

$dg = dx$ و $\therefore h = \frac{e^{-3x}}{-3}$ بعد إجراء تكامله حسب الصيغة (19).

والآن:

$$\int xe^{-3x} dx = \frac{xe^{-3x}}{-3} - \int \frac{e^{-3x}}{-3} dx + c$$

$$= \frac{xe^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{(-3)^{2}} + c$$

$$= -\frac{1}{9} e^{-3x}(3x-1) + c$$

4- جد تكامل ما يأتي : $\int x^2 e^x dx$

<u>الجواب :</u>

$g = x^2$ و $dh = e^x dx$

$\therefore \quad dg = 2x$ و $h = e^x$

والآن :

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int e^x 2x + c$$

$$= x^2 e^x - 2e^x (x-1) + c$$

$$= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + c$$

$$= e^x (x^2 - 2x + 2) + c$$

5- جد تكامل ما يأتي: $\int x a^x dx$

<u>الجواب :</u>

ليكن $g = x$ و $dh = a^x dx$

$\therefore \quad dg = dx$ و $h = x(inx) - x + c$

بعد إجراء التكامل حسب الصيغة (21)

$$\therefore \quad \int x(inx)dx = [x(inx) - x] - \int x(inx) - xdx + c$$

$$= x^2(inx) - x^2 - \left[\frac{x^2}{2}(inx) - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\right] + c$$

$$= x^2(inx) - x^2 - \frac{x^2}{2}(inx) + \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} + c$$

$$= \frac{x^2}{2}(inx) - \left(x^2 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4}\right) + c$$

$$= \frac{x^2}{2}(\ln x) - \frac{x^2}{4} + c$$

وهي نفس الصيغة لو أجرينا التكامل مباشرة حسب الصيغة (22)

تمارين (1-4)

جد قيمة التكاملات الآتية باستخدام التكامل بالأجزاء :

-1 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - x^3}}$

-2 $\int \frac{\sqrt{(2 - x^2)}}{x^3} dx$

-3 $\int \frac{x^3 dx}{(x^2 + 4)^2}$

-4 $\int \frac{(3x^2 - 5x - 6)dx}{(x^2 + 1)(x - 3)}$

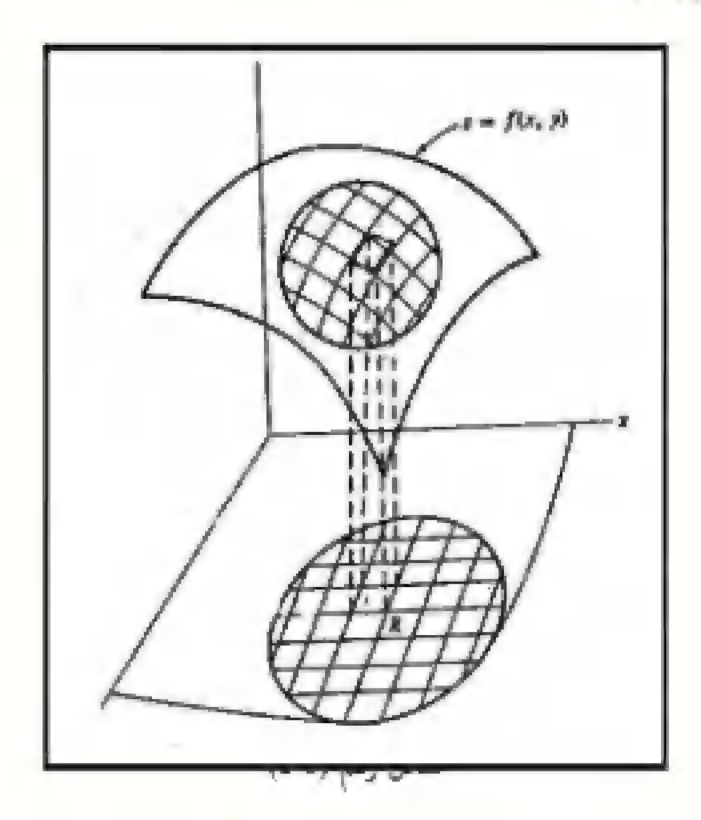
-5 $\int \frac{\left(x^{1/3} - x^{2/3}\right)dx}{2x^{1/4}}$

1-10 التكامل المضاعف Multiple Integration

يحدد تكامل : $\int_a^b f(x)\,dx$ بالنسبة للدالة $f(x)$ بحدود المسافة $a \le x \le b$

وبنفس الطريقة يحدد التكامل المضاعف : $\iint_R f(x, y)\,dy\,dx$ بالنسبة للدالة $f(x, y)$ بحدود المنطقة المحددة (R) بالمستوى (x , y). ويعرف تكامل $f(x)$ بالمساحة، أما التكامل المضاعف فيعرف بالحجم كما مبين في الشكل رقم (1-6) بافتراض كون الدالة

$f(x,y)$ موجبة فوق المنطقة (R) أما الحجم المحسوب فيقع تحت السطح $z = f(x,y)$ وفوق المنطقة (R) في المستوى (x y)



إن حساب التكامل المضاعف يتم عن طريق التكامل الجزئي المتوالي وهو عكس عمليات التفاضل الجزئي. أي عند حساب التكامل المضاعف لدالة ذات متغيرين مستقلين يفترض تغير احدهما وثبات الآخر ومن ثم يتم تكامل الدالة الجديدة بالنسبة للمتغير الآخر . أي حسب الصيغة التالية :

$\iint\limits_R f(x,y)\ dy\ dx$ أو حسب الصيغة الأكثر تفصيلاً :

$$\int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\ dy\ dx$$

حيث أن a , b ثوابت . ويمكن كتابة الصيغة الأخيرة كالآتي :

$$\int_a^b [\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)\ dy]dx \qquad (1 - 9)$$

ولحساب تكامل $f(x,y)$ يتم أولاً جزئياً بالنسبة للمتغير y ويحسب لنهايات معينة. وتكون النتيجة دالة x والتي يتم تكاملها بالنسبة للمتغير x محسوبة النهايات معينة أيضا. وتجدر الإشارة إلى أن التكامل يتم من الداخل إلى الخارج ولهذا فان الإشارة الأولى

للتكامل تعود إلى أخر عملية للتفاضل وهكذا. كما يجب الإشارة إلى ضرورة حذف المتغير الذي تجري عملية تكامله من التكامل المتبقي نهائياً.

أمثلة

احسب قيمة التكامل المضاعف التالي :

1) $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{x}{y^2}\, dy\, dx$

<u>الجواب:</u>

بإعادة الصياغة نحصل على :

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^{-2}\, dy\, dx$$

الآن تبدأ عملية التكامل من الداخل إلى الخارج بافتراض x ثابت :

$$\int_0^1 xy \Big|_{x^2}^{x} dx$$

ويظهر أن التكامل أصبح f (g) وبذلك تكون الخطوة التالية هي حساب قيمة التكامل عندما تكون y محددة بالفترة (x , x^2) :

$$\int_0^1 \left[x\left(x\right) - x\left(x^2\right)\right] dx$$

$$= \int_0^1 x^2 - x^3\, dx$$

والآن أصبح التكامل f (x) وبالإمكان حساب قيمته كالآتي :

$$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1$$

$$= [\frac{1}{3}(1)^3 - \frac{1}{4}(1)^4] - [\frac{1}{3}(0)^3 - \frac{1}{4}(0)^4]$$

$$= \frac{1}{12} - (0) = \frac{1}{12}$$

$\int_0^1 \int_0^2 (x+2)\, dy\, dx$ (2

<u>الجواب :</u>

نبدأ عملية التكامل بافتراض x ثابت .

$$= \int_0^1 xy + 2y \Big|_0^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 [x(2)+2(2)-x(0)+2(0)]$$

$$= \int_0^1 2x+4\, dx$$

والآن تكامل بالنسبة إلى x لتحصل على :

$$= x^2 + 4x \Big|_0^1$$

$$= [(1)^2+4(1)]-(0)$$

$$= 5$$

$\int_0^1 \int_{y^2}^{y} x^{1/2}\, dx\, dy$ (3

<u>الجواب:</u>

$\int_0^1 2\frac{x^{3/2}}{3} \Big|_{y^2}^{y} dy$ (بافتراض أن y ثابت)

$$= \int_0^1 \left(\frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{2y^3}{3}\right) dx$$

$$= \frac{4}{15} y^{5/3} - \frac{1}{6} y^4 \Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{4}{15} - \frac{1}{6}\right) - (0)$$

$$= \frac{1}{10}$$

الجزء الثالث

4) $\int_0^{-1}\int_{y+1}^{2y} xy\ dx\,dy$

$\int_0^{-1}\frac{1}{2}x^2y\Big|_{y+1}^{2y}\,dx$ (بافتراض y ثابت)

$$= \int_0^{-1}\frac{(2y)^2y-(y+1)^2y}{2}\,dy$$

$$= \int_0^{-1}\frac{(4y^3-y^3-2y^2-y)}{2}\,dy$$

$$= \int_0^{-1}\frac{(3y^3-2y^2-y)}{2}\,dy$$

$$= \frac{3}{8}y^4-\frac{2}{6}y^3-\frac{y^2}{4}\Big|_0^{-1}$$

$$= [\frac{3}{8}(-1)^4-\frac{2}{6}(-1)^3-\frac{(-1)^2}{4}]-(0)$$

$$= \frac{3}{8}+\frac{2}{6}-\frac{1}{4}$$

$$= \frac{11}{24}$$

تمارين (1-5)

حدد قيمة التكاملات المضاعفة الآتية :

1- $\int_0^2\int_1^3 (x-y)dxdy$

2- $\int_0^{-1}\int_{y^2}^{2} xdxdy$

3- $\int_0^2\int_1^4 x^{3/2}dxdy$

4- $\int_{-3}^0\int_0^x x^2y^2dxdy$

الفصل الثاني

التكامل

وتطبيقاته الاقتصادية



التكامـــل وتطبيقاته الاقتصادية

2-1 المقدمة

ذكرنا في الفصل الخامس عند استعراض التحليلات الكمية للظواهر الاقتصادية باستخدام حساب التكامل بان التغيرات التي تطرأ على المتغيرات المستقلة في أية دالة والتي تؤثر على المتغير المعتمد ربما تكون مباشرة أو تأخذ صيغة المتوسط أو الصيغة الحدية . وان الصيغة الحدية يمكن أن تستخرج عن طريق إجراء التفاضل كما يمكن معرفة الدالة إذا كانت لدينا الصيغة الحدية لها بغض النظر عن الثابت الذي تحتويه وذلك عن طريق إجراء عملية التكامل للدالة الحدية والفقرات التالية تعطي عرضا" لبعض التحليلات الكمية الاقتصادية بمساعدة ما يقدمه فن التكامل .

2-2 التكاليف Costs

عندما تعطى دالة التكاليف بصيغة : $y = f(x)$ حيث أن y تمثل التكاليف الكلية و(x) هي الكميات المنتجة والمسوقة من سلعة معينة . فان متوسط التكاليف يكون:

$$\frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

أما التكاليف الحدية (M C) فهي:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad (2\text{-}1)$$

ويبدو واضحاً بأن $f'(x)$ ما هي إلا مشتقة الدالة (y) بالنسبة إلى (x) وقد نحتاج أحيانا للبحث عن $f(x)$ مبتدئين بـ $f'(x)$ أي إذا أعطينا $f'(x)$ وطلب منا إيجاد $f(x)$ نبدأ العمل عن طريق إجراء تكامل الدالة $f'(x)$ بالنسبة إلى (x) لنحصل على:

$$\begin{aligned} y &= f'(x)\,dx \\ &= f(x) + c \end{aligned} \qquad (2\text{-}2)$$

وحيث أن c يأخذ قيما عديدة غير محددة لذلك سنحصل على مجموعة لانهاية لها من دوال التكاليف ، ولتفادي مثل هذه المشكلة وحيث أن الهدف هو معرفة دالة التكاليف المعنية لهذا ينبغي ذكر الشرط الأولي : أي تحديد مقدار (c) الذي يعني في الدالة أعلاه مقدار التكاليف الثابتة أو التكاليف قبل التشغيل أي مجموع التكاليف عندما تكون: x = 0

دعنا نتناول أمثلة توضيحية :

مثال (1) :

كانت التكاليف الحدية كدالة للوحدة الواحدة المنتجة من السلعة (x) كالآتي :

$$MC = y = \frac{dy}{dx} = 0.2 - 0.036x$$

جد دالة التكاليف الكلية إذا علمت بان التكاليف الثابتة كانت (25) وحدة .

الجواب :

$$y = \int (0.2 - 0.036x)\ dx$$

$$= 0.2x - 0.018x^2 + c$$

والآن عندما x = 0 فإن y = 25 ويكون لدينا :

$$25 = 0.2(0) - 0.018(0)^2 + c$$

$$\therefore c = 25$$

وبذلك نحصل على دالة التكاليف الكلية بصيغتها الكاملة كالآتي :

$$y = 25 + 0.2x - 0.018x^2$$

مثال (2) :

وجد مدير الإنتاج في إحدى المصانع أن دالة التكاليف الحدية لإنتاج وحدة واحدة من السلعة (x) كالآتي :

$$MC = \frac{dy}{dx} = y' = 8 + 15x - 2x^3$$

جد دالة التكاليف ودالة متوسط التكاليف إذا كانت التكاليف الثابتة (42) وحدة.

الجواب:

$$y = \int (8 + 15x - 2x^3)\, dx$$

$$= 8x + 7.5x^2 - 0.5x^4 + c$$

وعندما تكون x = 0 فان y = 42 ولهذا فإن c = 42 وحدة

إذن :

$$y = 42 + 8x + 7.5x^2 - 0.5x^4$$

وعليه فان دالة متوسط التكاليف تكون :

$$\frac{y}{x} = \frac{42}{x} + 8 + 7.5x - 0.5x^3$$

2-3 العائدات Revenue

عندما تكون دالة الطلب بالصيغة الآتية :

$$p = f(q) \qquad (2\text{-}3)$$

حيث أن (p) هو سعر الوحدة الواحدة من المنتجات (q). ومن دالة الطلب يمكن استخراج دالة العائدات (R) على أساس أن :

$$\begin{aligned} R &= pq \\ &= qf(q) \end{aligned} \qquad (2\text{-}4)$$

أما دالة العائدات الحدية بالنسبة إلى الطلب (q) فهي مشتقة دالة العائدات بالنسبة إلى (q) أي أن :

$$MR = R' = \frac{dR}{dq} = R'(q) \qquad (2\text{-}5)$$

وإذا كانت في متناولنا دالة العائدات الحدية فيمكن عن طريق إجراء تكاملها أن نحصل على دالة العائدات منسوبة لـ (q) كما يأتي :

$$R = \int R'(q)dq \qquad (2\text{-}6)$$
$$= R(q) + c$$

وتبقى لدينا مشكلة للمقدار الثابت (c) في دالة العائدات والذي ينبغي أن يحدد طبقا للشرط الأولي كي تكون الدالة المستخلصة هي الدالة الوحيدة ولما كانت العائدات تساوي صفرا عندما لا تكون هناك أية مبيعات أي عندما (q = 0) لذلك يمكن اعتبار قيمة c = 0 عندما q = 0 في دالة العائدات .

كما ينبغي ملاحظة أن متوسط العائدات أو ما يسمى بعائد الوحدة الواحدة ما هو إلا سعر الوحدة الواحدة (p) ولهذا فان منحنى متوسط العائدات ومنحنى الطلب متطابقان أي أن :

$$p = \frac{R}{q}$$

لنأخذ بعض الأمثلة :

مثال (1) :

أشرت عائدات إحدى المزارع دالة عائدات حدية كالآتي :

$$\frac{dR}{dq} = 10 - 3q - q^2$$

والمطلوب إيجاد دالة العائدات ودالة الطلب :

الجواب :

$$R = \int R'(q)\, dq = \int (10 - 3q - q^2)\, dq$$

$$= 10q - \frac{3}{2}q^2 - \frac{1}{3}q^3 + c$$

وعندما تكون q = 0 فان R = 0 وبذلك تكون c = 0

إذن دالة العائدات الكلية هي :

$$R = 10q - \frac{3}{2}q^2 - \frac{1}{3}q^3$$

أما دالة الطلب فهي:

$$p = \frac{R}{q} = 10\frac{q}{q} - \frac{3}{2}\frac{q^2}{q} - \frac{q^3}{3q}$$

$$= 10 - \frac{3}{2}q - \frac{1}{3}q^2$$

ونشير هنا إلى أن (P) يمثل السعر .

مثال (2) :

أعطيت دالة العائدات الحدية لإحدى المنشآت بالصيغة الآتية :

$$MR = \frac{dR}{dq} = \frac{a}{q+b} - k$$

حيث أن q هي الكميات المنتجة والمباعة و (a , b, k) ثوابت والمطلوب إيجاد دالة الطلب :

الجواب :

$$R = \int (\frac{a}{q+b} - k)dq$$

$$R = a\ln(q+b) - kq + c$$

وهذه هي دالة العائدات . أما دالة الطلب فتستخرج كما ذكرنا سابقا من خلال العلاقة R = p q

وهنا p تمثل السعر أي أن :

$$p = \frac{R}{q} = \frac{1}{q}a\ln(q+b) - k + \frac{c}{q}$$

مثال (3) :

كانت دالة العائدات الحدية في معمل للإطارات بالصورة الآتية :

$$\frac{dR}{dq} = 9 - 6q + q^2$$

جد دالة العائدات ودالة الطلب ما هي الحدود التي وضعها المعمل على إنتاج وتسويق إنتاجه (q)

الجواب:

$$R = (3 - 4q + q^2)dq$$

$$= 3q - 2q^2 + \frac{1}{3}q^3 + c$$

وحيث أن c = 0 ، لأن R = 0 عندما q = 0

$$\therefore \quad R = 3q - 2q^2 + \frac{1}{3}q^3$$

أما دالة الطلب فتساوي :

$$p = \frac{R}{q} = 3 - 2q + \frac{1}{3}q^2$$

$$= \frac{9 - 6q + q^2}{3}$$

$$\therefore p = \frac{(3 - q)^2}{3}$$

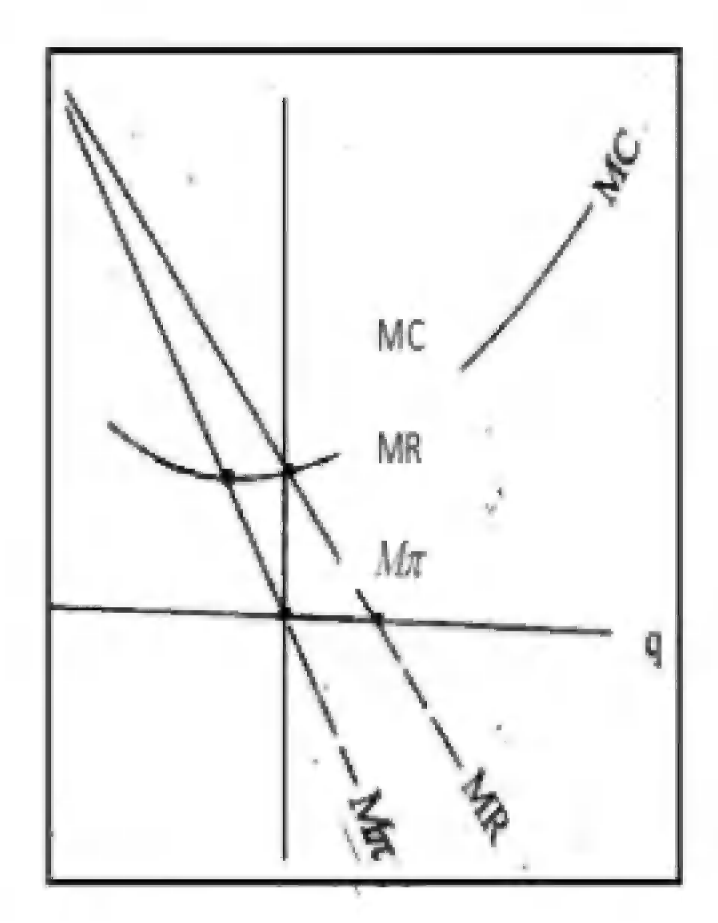
وهكذا يبدو أن الحدود التي وضعت على q هي أن تكون :

$$0 < q < 3$$

لأن q = 0 ليس لها معنى اقتصادي أما q = 3 فيؤدي إلى أن تكون نتيجة الطرف الأيسر في دالة السعر صفرا وبذلك يكون p = 0 وهذا غير ممكن.

4-2 التكاليف والعائدات والأرباح الحدية (Marginal (Cost , Revenues and Profits

يمكن استخدام التكامل في تحديد الأرباح الكلية بافتراض وجود سوق المنافسة التامة حيث أن الأرباح تعظم عندما تتساوى العائدات الحدية مع التكاليف الحدية (MR=MC). ولهذا فان الأرباح الكلية هي تكامل الفرق MR و MC منذ بدء الإنتاج (الإنتاج =0) وحتى تبلغ الكميات التي تكون عندها الإرباح في أقصاها. أي أنها تكامل الأرباح الحدية (π M) ضمن مدى الإنتاج أعلاه. كما في الشكل رقم (2-1).



دعنا نستعين بالأمثلة :

مثال (1):

إذا كانت لدينا كل من دالة العائدات الحدية والتكاليف الحدية كما في الصيغة الآتية والمطلوب استخدام هاتين الدالتين لإيجاد مستوى الإنتاج الذي عنده تحقق المؤسسة أقصى الأرباح ومقدار الأرباح الكلية عند هذه النقطة.

$$MR = 40 - 3q - 2q^2$$

$$MR = 10 - 2q + q^2$$

الجواب:

من الواضح أن الأرباح الحدية (π M) أي أقصى الأرباح تتحقق عندما MR=MC أو عندما MR-MC=0 كما في الشكل (1-2) ولهذا فإن:

$$M\pi = MR - MC = (40 - 3q - 2q^2) - (10 - 2q + q^2) = 0$$

$$= 30 - q - 3q^2 = 0$$

$$= (3 - q)(10 + 3q) = 0$$

$$\therefore \quad q = 3$$

أو $q = -\frac{10}{3}$ تهمل النتيجة السالبة $\notin N$

والآن لدينا دالة الأرباح الحدية (π M) أي لدينا $\frac{d\pi}{dq} 30 - q - 3q^2$ وان مشتقتها الثانية تؤشر لنا فيما إذا كانت الأرباح في حالة تعظيم أو إقلال بالنسبة لقيمة معينة من (q) وذلك:

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} = -1 - 6q$$

وعندما يكون مستوى الإنتاج (q = 3) فإن : $\frac{d^2\pi}{dq^2} = -1 - 6(3) = -19$ أي أن : $\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$

ولهذا فإن الأرباح تكون عند مستواها الأعظم عندما تكون q =3 أما الأرباح الكلية فتستخرج بإجراء تكامل لدالة الأرباح الحدية في المدى ما بين (3-0) وكما يأتي:

الأرباح الكلية : $\pi = \int_0^3 (30 - q - 3q^2)dq$

$$= 30q - \frac{1}{2}q^2 - q^3 \Big|_0^3$$

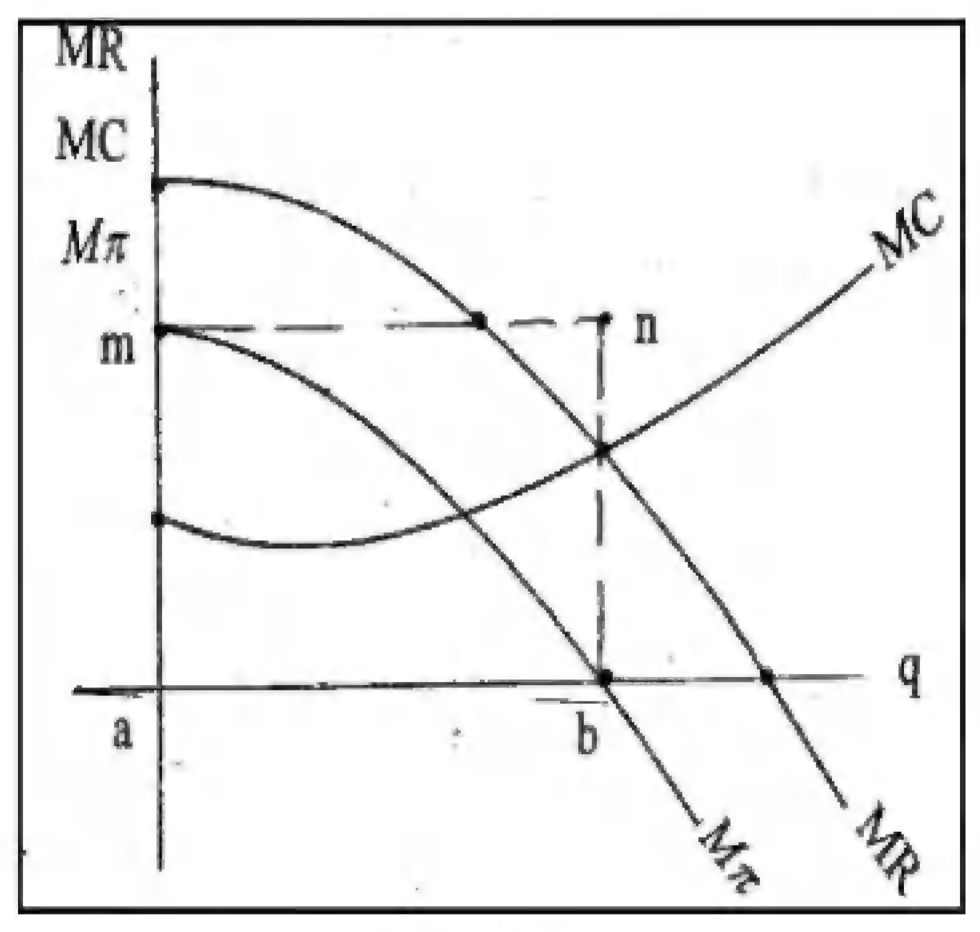
$$= \left[30(3) - \frac{1}{2}(3)^2 - (3)^3\right] - \left[30(0) - \frac{1}{2}(0)^2 - (0)^3\right]$$

$$= 90 - \frac{9}{2} - 27$$

$$= 58.5$$

وهي الأرباح الكلية

وكما يظهر في الشكل رقم (2-2):



شكل رقم (2-2)

ملاحظة:

لغرض تسهيل عملية رسم الشكل (2-2) افترضنا بأن كل (10) وحدات من q تقابل وحدة واحدة من MR, MC, M π.

إن عملية استخراج الأرباح الكلية هي عملية إيجاد المساحة تحت المنحنى $A = 30 - q - 3q^2$ وذلك عن طريق إجراء تكامل الدالة (A) بين الحد الأدنى والحد الأعلى للإنتاج (q) أي بين $0 \le q \le 3$ ويبدو واضحاً أن المساحة المظللة (abm) هي اكبر

من نصف المساحة (abnm) حيث أن أبعاد (abnm) هندسية وأن (ab=3) وهو الحد الأعلى للإنتاج (q) أما am = 30 عندما q = 0 وعلى هذا الأساس فإن مساحة $abnm = ab \times am = 3 \times 30 = 90$ ولما كانت abm = 58.5 حسبما ورد في الحل لذلك نلاحظ عند مقارنة المساحتين في الشكل (2-2) بأن $abm < \frac{1}{2} abnm$ وهو ما يحقق صحة الحل من خلال نظرة أولى إلى الشكل البياني.

مثال (2):

وجد في إحدى المنشآت أن دالة التكاليف الحدية والعائدات الحدية كالآتي:

$$MC = 10 - 3q + 2q^2$$

$$MR = 50 - 5q$$

والمطلوب إيجاد:

(أ) مستوى الإنتاج الذي يحقق للمنشأة أعظم ربح.

(ب) مقدار الأرباح الكلية على افتراض سيادة سوق المنافسة التامة.

الجواب:

(أ).
$$M\pi = MR - MC = (50 - 5q) - (10 - 3q + 2q^2) = 0$$

$$= 40 - 2q - 2q^2 = 0$$

$$= (5 + q)(8 - 2q) = 0$$

$q = 4$ أو $q = -5$ (تهمل)

والآن لنرى فيما إذا كانت دالة الأرباح عند مستواها الأعلى أو الأدنى عندما تكون q = 4 وذلك:

$$\frac{dM\pi}{dq} = -2 - 4q$$

$$= -2 - 4(4) = -18$$

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0 \text{ : أي أن } \therefore \frac{dM\pi}{dq} < 0$$

ولهذا فإن دالة الأرباح تكون في مستواها الأعظم عندما q=4 وإذا ما كاملنا دالة الأرباح الحدية

نحصل على دالة الأرباح الكلية (π) المحصورة بين (0, 4) من وحدات الإنتاج (q):

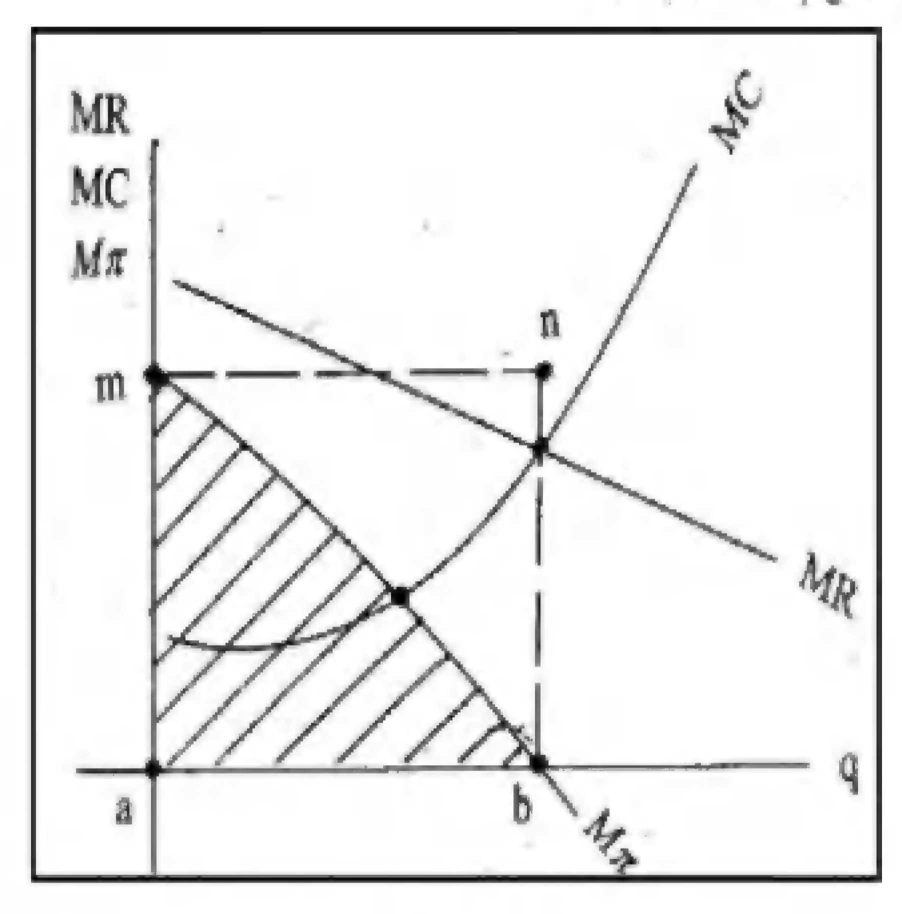
$$\pi = \int_0^4 (40 - 2q - 2q^2)dq$$

$$= 40q - q^2 - \frac{2}{3}q^3 \Big|_0^4$$

$$= \left[160 - 16 - \frac{128}{3}\right] - [0]$$

$$= \frac{304}{3} = 101.3$$

كما موضح في الشكل رقم (2-3)



شكل رقم (2-3)

وواضح أيضاً أن المساحة المظللة 101.3 = abm وقد حصلنا عليها بإجراء تكامل لدالة الأرباح الحدية بين (0, 4) من الإنتاج (q) ويلاحظ أيضاً ولأجل التدقيق السريع أن:

$$\left(\frac{1}{2} abnm < 103.3 \right)$$ أي :

$$\frac{1}{2}(100) < 103.3 .$$

بحثنا في هذه الفقرة العلاقة بين العائدات والتكاليف والأرباح في حالة كون التكامل غير محدد أما إذا كان التكامل محدد فإن بعض العمليات الرياضية قد تحتاج إلى بعض الإيضاح. وقبل أن نبدأ العمل بذلك نذكر بأن المنتج يحصل على أقصى الأرباح في ظل المنافسة التامة إذا تساوت كل من التكاليف الحدية مع العائدات الحدية (MR=MC) وعلى هذا الأساس فان مجموع الأرباح تستخرج من عملية تكامل الفرق بين العائد الحدي والتكاليف الحدية (MR-MC) ابتداء" من لحظة كون الإنتاج يساوي صفراً إلى الكمية التي تكون عندها الأرباح في أقصى مستوى لها.

وقد يكون من المفيد تناول بعض الأمثلة:

مثال (1):

جد النقطة التي يكون عندها الإنتاج بمستوى يحقق أقصى الأرباح إذا كان العائد الحدي والتكاليف الحدية كما في الصيغة الآتية:

$$MR = 14 - 3x - 3x^2$$
$$MC = 8 - 2x - 2x^2$$

الجواب:

كي يحقق المنتج أقصى الأرباح عندما:

$$MR - MC = 0$$

$$\therefore 14-3x-3x^2-(8-2x-2x^2)=0$$
$$6-x-x^2=0$$

وبإعادة الصياغة:

$$x^2+x-6=0$$
$$(x+3)(x-2)=0$$

إما $x-2=0$ أو $x+3=0$

$\therefore x=2$ $\therefore x=-3$ (تهمل)

والآن نلاحظ بأن المشتقة الأولى للدالة (MR-MC) ما هي إلا المشتقة الثانية لمجموع الأرباح وإن إشارة هذه المشتقة تشير إلى ما إذا كانت الأرباح في أقصاها أو أدناها لكمية معينة من الإنتاج (x). لنتابع الحل:

ضع للاختصار MR-MC=y

$$\therefore y=6-x-x^2$$

و $$\frac{dy}{dx}=-1-2x$$

وحيث أن: $MR=14-3x-3x^2$

$$\therefore R=\int(14-3x-3x^2)dx$$

$$\therefore R=14x-\frac{3}{2}x^2-x^3+c$$

و $MC=8-2x-2x^2$

$$C=\int(8-2x-2x^2)dx$$

$$\therefore C = 8x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + c$$

والآن الأرباح (P) هي :

$$P = R - C = (14x - \frac{3}{2}x^2 - x^3 + c) - (8x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + c)$$

$$\therefore P = 6x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

$$\frac{dP}{dx} = 6 - x - x^2 = (MR - MC)$$

والآن:

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -1 - 2x$$

وهكذا نلاحظ بأن:

$$\frac{d}{dx}(MR - MC) = \frac{d^2P}{dx^2}$$

والآن نواصل الحل: بما أن x =3 (كما في أعلاه)

$$\therefore \frac{d^2P}{dx^2} = -1 - 2(2)$$

$$= -5 < 0$$

إذن تكون الأرباح في أقصاها عندما يكون الإنتاج (x = 3) أما مجموع الأرباح فيكون:

$$TP = \int_0^2 (6 - x - x^2)dx$$

$$= 6x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2$$

$$= 6(2) - \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3 - (0)$$

$$= 12 - 2 - \frac{8}{3} = \frac{22}{3}$$

وهذه النتيجة تدلنا على طريقة اختصار كل العمليات السابقة والبدء من دالة (MR-MC) ومن ثم إجراء تكاملها للحصول على الأرباح الكلية (TP) مباشرة بعد تحديد مستوى الإنتاج .

مثال (2):

إذا كانت العائدة الحدية والتكاليف الحدية كما مبين في أدناه . جد مستوى الإنتاج الذي يحقق أقصى الأرباح واستخرج بعدئذ مجموع الأرباح.

$$MR = 20 - 2x$$
$$MC = x^2 - 8x + 20$$

الجواب:

نضع MR-MC=0

$$MR - MC = 20 - 2x - (x^2 - 8x + 20) = 0$$

$$= -x^2 + 6x = 0$$
$$x(-x + 6) = 0$$

إما -x+6=0

$$\therefore x = 6$$

أو x = 0 (تهمل لأنه لا معنى للتحليل إذا كان الإنتاج صفر)

والآن:

$$\frac{d}{dx}(MR-MC)=-2x+6$$
$$=-2(6)+6$$
$$=-6<0$$

إذن تكون الأرباح في أقصاها عندما يكون الإنتاج (x = 6) أما مجموع الأرباح (TP) فهي :

$$TP = \int_0^6 (-x^2+6x)dx$$
$$=-\frac{1}{3}x^3+3x^2\Big|_0^6$$
$$=-\frac{1}{3}(6)^3+3(6)^2-(0)$$
$$=-72+108$$
$$=36$$

مثال (3):

توصلت إحدى الشركات إلى دراسة تفيد بان كل وحدة حاسوب تضيفها إلى الوحدات القائمة تؤدي إلى الاقتصاد في الوقت والأخطاء بموجب المعادلة الآتية: $MR=3x^2+11$ حيث أن (x) تشير إلى عدد الوحدات المضافة أما كلفة إدامة وصيانة وحدة الحاسوب فهي : $MC=4x^2+2$ حيث تشير (x) هنا إلى عدد الوحدات المضافة أيضا". ولأجل تعظيم صافي العائدات (R - C) فما هي عدد الوحدات التي ينبغي إضافتها وما هو مقدار الاقتصاد في الوقت والأخطاء. مفترضين أن كل من المنحنيين R و C مستمران .

الجواب :

دع : $MR-MC=0$

$$\therefore 3x^2+11-(4x^2+2)=0$$

$$-x^2+9=0$$

وبإعادة الترتيب ينتج :

$$x^2-9=0$$

$$\therefore (x-3)(x+3)=0$$

$$\therefore x=3$$

أو $x=-3$ (تهمل)

والآن:

$$\frac{d}{dx}(MR-MC)=-2x$$

$$=-2(3)$$

$$=-6<0$$

∴ تكون العائدات في أقصاها (وهي الاقتصاد في الوقت والأخطاء) عندما يكون عدد الوحدات المضافة ($x=3$) والآن يكون مقدار العائد (TP) كما يأتي :

$$TP=\int_0^3 (-x^2+9)\ dx$$

$$=[-\frac{1}{3}x^3+9x]_0^3$$

$$=-\frac{1}{3}(3)^3+9(3)-(0)$$

$$=-9+27$$

$$=18$$

وهكذا تظهر النتائج بأن من مصلحة الشركة إضافة (3) وحدات حاسوب إلى أجهزتها وتحصل على أقصى فائدة من استخدامها في تقليل الوقت والأخطاء حيث تقيم هذه الفائدة بـ(18) وحدة نقدية .

5-2 الاندثـار Depreciation

يقصد بالاندثار الانخفاض في قيمة الموجودات الثابتة من جراء الاستخدام والتآكل. وتقوم المنشآت عادة برصد مبالغ سنوية تسمى مخصصات الاندثار لغرض تعويض هذا الانخفاض في قيمة مجوداتها ، وتحسب هذه المخصصات السنوية بطرق عديدة أما معدلاتها فتخضع أيضا لحسابات خاصة تعتمد على طبيعة الموجودات الثابتة وظروف تشغيلها والوسائل المتاحة لصيانتها. ومن التطبيقات السائدة لتقدير الاندثار هي حساب معدل الاندثار كدالة للزمن بعد تحديد الفترة التي تصلح فيها الآلة للاستعمال والتشغيل. وتأخذ الدالة المذكورة الصيغة الآتية :

$$D = t^2 e^t \qquad (2\text{-}8)$$

حيث أن (D) هو معدل الاندثار، (t) الفترة الزمنية، (e) أساس اللوغاريتم الطبيعي.

وعلى هذا يمكن حساب قيمة الاندثار الكلي بعد فترة زمنية (T) بإجراء تكامل للدالة (D) كالآتي :

$$T\,D = \int_0^T t^2 e^t dt \qquad (2\text{-}9)$$

وعند حساب قيمة أعلاه بطريقة التكامل بالأجزاء نحصل على :-

$$\int t^2 e^t dt = \int t^2 d(e^t)$$
$$= t^2 e^t - \int e^t d(t^2)$$
$$= t^2 e^t - 2\int e^t t dt$$

$$= t^2e^t - 2(te^t - \int e^t dt)$$

$$= t^2e^t - 2(te^t - e^t)$$

$$= e^t(t^2 - 2t + 2) + c$$

وفي ضوء ذلك وبعد مرور الفترة الزمنية للاندثار (T) فإن قيمة الاندثار تكون :-

$$= e^T(T^2 - 2T + 2) - e^0(0 - 0 + 2)$$

$$= e^T(T^2 - 2T + 2) - 2$$

والآن لنأخذ المثال التالي :-

<u>مثال:</u>

اشترت إحدى المؤسسات حاسوباً وقدرت عمره الإنتاجي بـ(10) سنوات احسب مجموع الاندثارات التي ستتحملها المؤسسة خلال الفترة أعلاه إذا كان معدل الاندثار يحسب بموجب المعادلة الآتية :-

$$D = t^2e^t dt$$

<u>الجواب :</u>

$$TD = \int_0^{10} t^2e^t dt$$

$$= e^{10}[10^2 - 2(10) + 2] - 2$$

$$= 22026.5[100 - 20 + 2] - 2$$

$$= 22026.5(80)$$

$$= 1762120$$

6-2 الدخل القومي والاستهلاك والادخار
National Income Consumption and Saving

تناولنا في الفصل الثاني دالة الاستهلاك بشكلها الخطي وذلك كون الاستهلاك دالة للدخل القومي.

$$c = f(y) \qquad (2\text{-}10)$$

حيث أن: (c) هو الاستهلاك الكلي و (y) مستوى الدخل القومي وعلى هذا الأساس فإن الميل الحدي للاستهلاك ما هو إلا المشتقة الأولى لهذه الدالة.

$$\frac{dc}{dy} f'(y) \qquad (2\text{-}11)$$

وعلى افتراض أن الدخل القومي هو مجموع الاستهلاك والادخار أي أن :

$$y = c + s$$

و $s = y - c$

ولهذا فإن : $\frac{ds}{dy} = \frac{dy}{dy} - \frac{dc}{dy}$

$$= 1 - \frac{dc}{dy} \qquad (2\text{-}12)$$

وإذا ما أعطينا دالة الميل الحدي للاستهلاك فبالإمكان الوصول إلى مستوى الاستهلاك الكلي عن طريق إجراء تكامل الدالة المذكورة بالنسبة إلى (y) وذلك :

$$\begin{aligned} c &= \int f'(y)dy \\ &= f(y) + k \end{aligned} \qquad (2\text{-}13)$$

ولغرض الوصول إلى دالة استهلاك معينة وليس دوال متعددة لذا يجب أن يتوفر الشرط الابتدائي الذي يحدد لنا قيمة (k) مع ملاحظة أن (k)هنا هو الثابت عند إجراء عملية التكامل وقد وضعناه بدلاً من (c) الذي اعتدنا عليه في عمليات التكامل لأجل تمييزه عن (c) الذي يرمز للاستهلاك الكلي في المعادلة (2-10) أعلاه.

مثـال (1) :

حدد أحد الاقتصاديين الميل الحدي للاستهلاك (بملايين الوحدات النقدية) بالآتي:

$$\frac{dc}{dy} = 0.7 + 2y^{\frac{1}{2}}$$

وعلى افتراض أن الاستهلاك يكون (10) إذا كان مستوى الدخل القومي (0) احسب دالة الاستهلاك

الجـواب:

$$c = \int (0.7 + 2y^{\frac{1}{2}})dy$$

$$= 0.7y + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}} + k$$

وحيث أن k = 10 عندما y = 0 $\therefore c = 10$

ولهذا فإن دالة الاستهلاك الكلي هي :

$$c = 10 + 0.7y + \frac{4}{3}y^{\frac{3}{2}}$$

مثـال (2):

تشير الإحصاءات في أحد البلدان بأن الميل الحدي للادخار كان 0.2 وعندما يكون مستوى الدخل القومي صفراً فأن مستوى الاستهلاك يكون (12). جد دالة الاستهلاك.

الجـواب:

بما أن:

$$\frac{ds}{dy} = 1 - \frac{dc}{dy}$$

$$\therefore \frac{dc}{dy} = 1 - 0.2$$

$$= 0.8$$

وبإجراء تكامل الدالة $\frac{dc}{dy}$ ينتج :

$$c = \int 0.8dy$$
$$= 0.8y + k$$

وحيث أن $c = 12$ عندما $y = 0$ لهذا فإن $k=12$ إذن دالة الاستهلاك الكلي تكون:

$$c = 12 + 0.8y$$

مثـال (3):

قدر الميل الحدي للادخار بالآتي:-

$$\frac{ds}{dy} = 1 - 0.4 - \frac{1}{6y^{\frac{2}{3}}}$$

جد دالة الاستهلاك مع العلم أن الاستهلاك الكلي يبلغ (24) عندما يكون مستوى الدخل صفراً.

الجـواب:

$$\frac{ds}{dy} = 1 - \frac{dc}{dy}$$

$$\therefore \frac{dc}{dy} = 1 - \frac{ds}{dy}$$

$$= 1 - (1 - 0.4 - \frac{1}{6y^{\frac{2}{3}}})$$

$$= 0.4 + \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}$$

وبإجراء تكامل للدالة $\frac{ds}{dy}$ نحصل على :

الجزء الثالث

$$\int 0.4 + \frac{1}{6} y^{-\frac{2}{3}} dy$$

$$= 0.4 y + \frac{1}{2} y^{\frac{1}{3}} + k$$

وحيث أن c = 24 عندما y = 0 لذلك تكون k = 24 وبذلك تصبح دالة الاستهلاك بالصيغة الآتية :

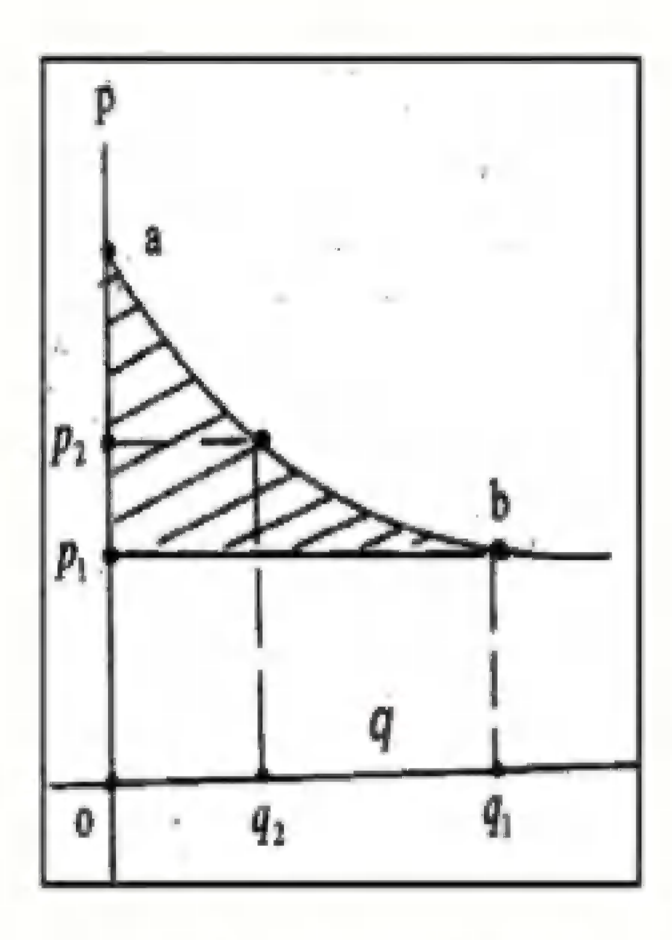
$$c = 24 + 0.4 y + \frac{1}{2} y^{\frac{1}{3}}$$

7-2 فائض المستهلك Consumer Surplus

يقصد بفائض المستهلك (cs) الفرق بين مقدار النقود التي أعدها الفرد كي يدفعها مقابل كمية من سلعة معينة ومقدار النقود التي دفعها فعلاً. ومبعث ذلك: إن الفرد يحتفظ في ذهنه دائماً بسعر (ثمن) معين يرغب بدفعه لقاء اقتناءه سلعة من غير أن يعود من السوق بدون شرائها.

ولهذا فأن درجة الإشباع التي تقاس بالسعر الذي يرغب الفرد بدفعه هي عموماً* اكبر من السعر الذي يدفعه في السوق فعلياً.

ولما كان المستهلكون يختلفون في تقييمهم لدرجة الإشباع المستحصلة من سلعة معينة مثل (q) لذلك يرغب المستهلكون بدفع أسعار مختلفة عن السلعة المذكورة مما يؤدي إلى رفع منحنى الطلب في السوق وهذا ينشأ عندما يكون هناك مستوى طلب معين على السلعة (q) ولنقل انه q2 فأن هناك بعض الإفراد الذين يرغبون بدفع السعر p2 لشراء السلعة المذكورة ، والبعض الأخر مستعدون لدفع أكثر من السعر p2 ، كما في الشكل رقم (2-4) .



فعندما تباع كمية مقدارها q_1 من السلعة في السوق فأن مقدار فائض الإشباع لجميع المستهلكين هو المساحة $a\,b\,p_1$ مع الإشارة إلى أن النقطة a يمكن تحديدها عندما يكون $q = 0$ ولهذا فأن الإشباع يمكن قياسه بلغة السعر لجميع المستهلكين المعنيين بشرائها.

مذكرين إلى أن المساحة $a\,b\,p_1$ كان قد تناولها الفريد مارشال [1]، وأسماها بفائض المستهلك وقد سبقه المهندس الفرنسي (A.J.Dupuit) (1804-1866) في الإشارة إليه. أن صيغة فائض المستهلك تظهر بالشكل التالي.

يساوي :
$$cs = \int_{0}^{q_1} f(q)\,dq - q_1 p_1 \qquad (2\text{-}14)$$

(1) الفريد مارشال (Alfred Marshall) : (1842-1924) اقتصادي إنكليزي درس الرياضيات وبعد ذلك اتجه لدراسة الاقتصاد واهم بحوثه تطويره لمفاهيم الاقتصاد الجزئي التي لازالت ذات قيمة عالية في مبادئ الاقتصاد ، ودراسات أخرى في القيمة والنقود والتجارة وغيرها.

حيث أن f(q) هي دالة الطلب ويظهر فائض المستهلك بمجرد إجراء التكامل و الحصول على المساحة تحت المنحنى بين $(0\ ,\ q_1)$ ومن ثم طرح المساحة التي تمثل قيمة الكمية من السلعة المشتراة فعلاً من ذلك والمتمثلة بالشكل $oq_1\ bp_1$ واختصار (q_1p_1).

مثـال (1):

إذا أعطيت دالة الطلب على سلعة معينة بالصيغة الآتية:-

$$p = 20 - 2q$$

جد فائض المستهلك عندما : $p_1=4$

الجـواب :

لاستخراج الحل نلاحظ أولاً ما يأتي :

حيث أن $p_1=4$ لذلك فإن :

$$p_1 = 20 - 2q_1$$

$$4 = 20 - 2q_1$$

$$\therefore q_1 = 8$$

فائض المستهلك يساوي :

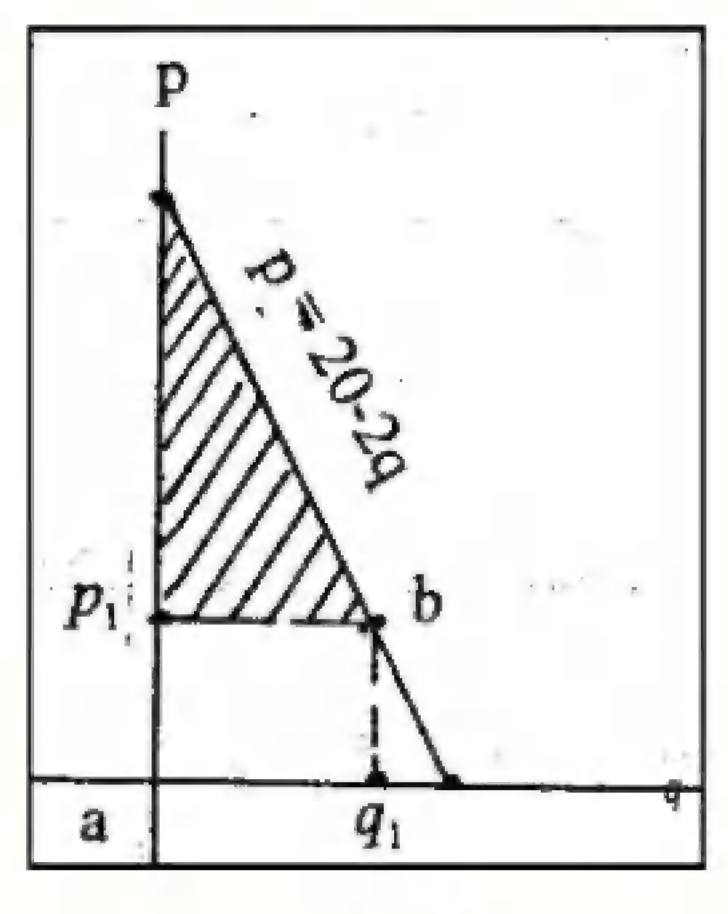
$$cs = \int_0^8 (20 - 2q)dq - q_1 p_1$$

$$= 20q - q^2\Big|_0^8 - (8)(4)$$

$$= [20(8) - (8)^2 - (0)] - 32$$

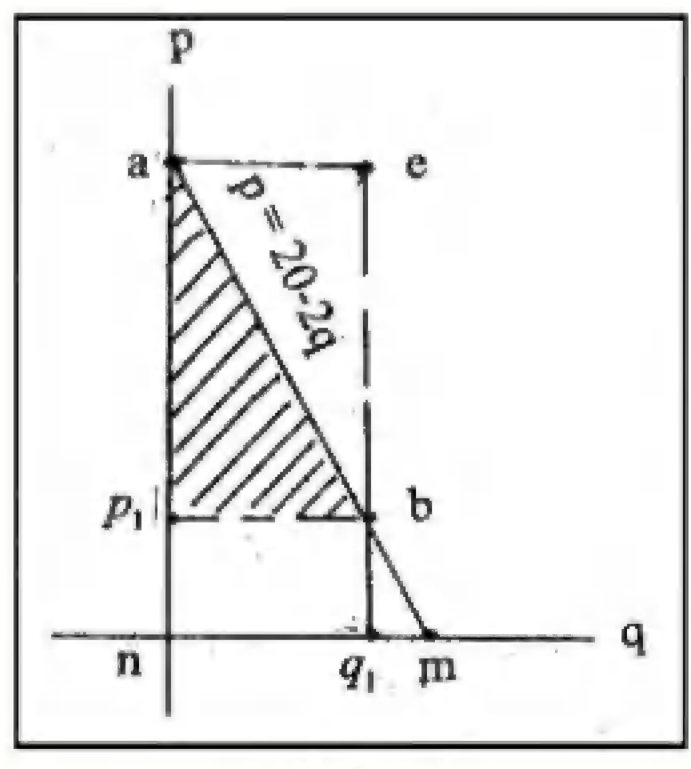
$$cs = 64$$

كما يظهر في الشكل رقم (5-2)



شكل رقم (2-5)

ويمكن الحصول على فائض المستهلك في المثال أعلاه هندسيا" مستفيدين من العلاقة الخطية لمعادلة الطلب فعند إعادة رسم الشكل البياني بعد إجراء بعض الإضافات التي تسهل العمل كما في الشكل رقم (2-6).



شكل رقم (2-6)

ومن الشكل أعلاه يلاحظ أن فائض المستهلك هو المساحة المظللة والتي تغطي المثلث $a \quad b \quad p_1$ وهذه المساحة تساوي :

$$cs = \Delta a \quad b \quad p_1$$

وحيث أن : $a \quad b \quad p_1$ يمكن استخراجه في ضوء المعلومات المعطاة وهي :

$$an = 20 - 2(0) = 20$$

عندما : q = 0 في معادلة الطلب .

ولما كانت : $np_1 = 4$

$$\therefore ap_1 = 20 - 4 = 16$$

كما لدينا :

$$nq_1 = p_1 b = 8$$

$$\therefore \Delta a \quad b \quad p_1 = \frac{1}{2}(p_1 b) ap_1$$

$$= \frac{1}{2}(8)16$$

$$\therefore CS = 64$$

وهي نفس النتيجة .

مثال (2):

إذا كانت دالة الطلب بالصيغة الآتية :-

$$p = 39 - q^2$$

جد فائض المستهلك إذا كانت : $q_1 = \frac{5}{2}$.

الجواب:

$$q_1 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore p_1 = 39 - (\frac{5}{2})^2$$

$$= \frac{131}{4}$$

فائض المستهلك =

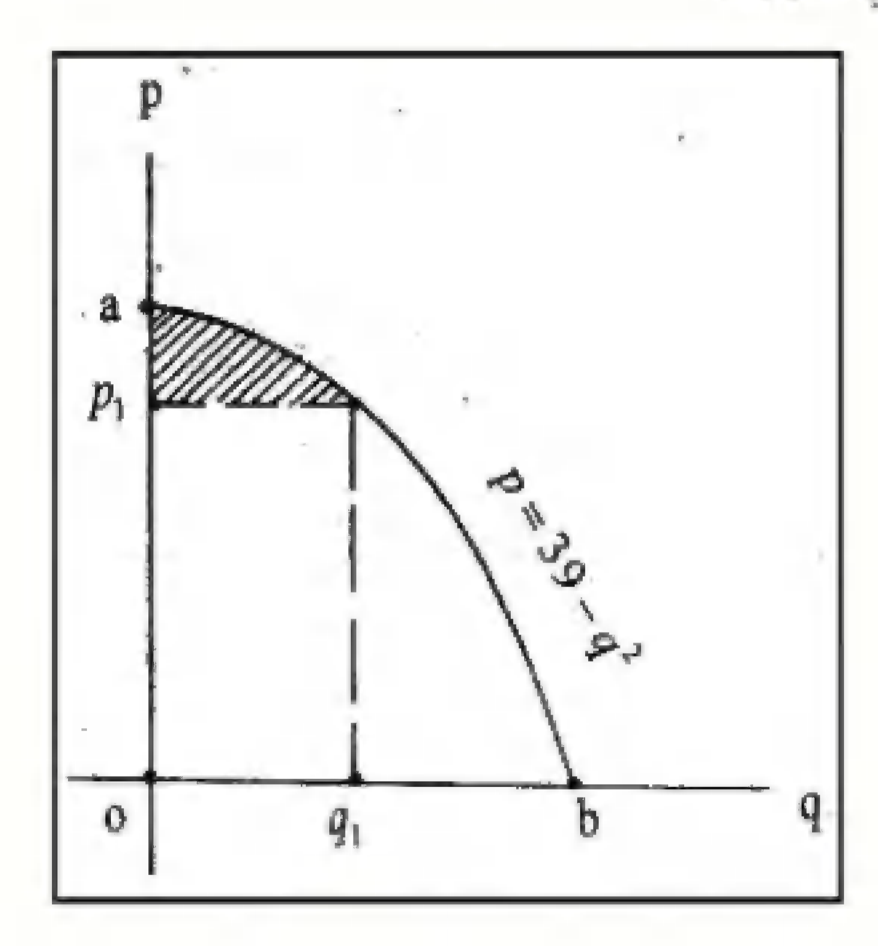
$$cs = \int_0^{5/2} (39 - q^2)dq - (\frac{5}{2})(\frac{131}{4})$$

$$= 39q - \frac{1}{3}q^3 \Big|_0^{5/2} - \frac{655}{8}$$

$$= 39(\frac{5}{2}) - \frac{1}{3}(\frac{5}{2})^3 - (0) - \frac{655}{8}$$

$$\therefore cs = \frac{195}{2} - \frac{125}{24} - \frac{655}{8} = \frac{250}{24}$$

كما في الشكل (7-2)



الشكل رقم (7-2)

مثال(3) :

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة بالصيغة الآتية :-

$$p = 45 - 2q - q^2$$

جد فائض المستهلك إذا كانت $q_1 = 5$.

الجواب:

حيث أن $q = 5$

$$\therefore p_1 = 45 - 2(5) - (5)^2$$
$$= 10$$

والآن : فائض المستهلك يساوي:

$$\int_0^{q} f(q)dq - q_1 p_1$$

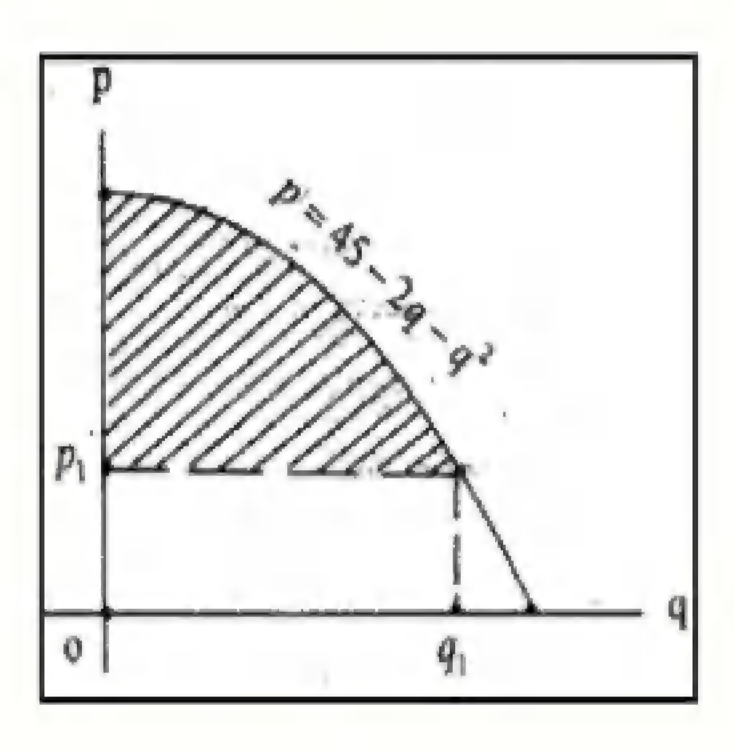
$$cs = \int_0^{5} (45 - 2q - q^2)dq - (5)(10)$$

$$= \int_0^{5} 45q - q^2 - \frac{1}{3}q^3\Big|_0^5 - 50$$

$$= 45(5) - (5)^2 - \frac{1}{3}(5)^3 - 50$$

$$\therefore cs = \frac{325}{3} = 108.3$$

كما في الشكل رقم (8-2) :



شكل رقم (2-8)

مثـال (4) :

وجد أن دالة الطلب على سلعة معينة بالصيغة الآتية :-

$$p = 36 - q^2$$

احسب فائض المستهلك إذا كانت السلعة حرة أي بلا مقابل أي أن $p = 0$

الجـواب :

إذا كان $p_1 = 0$ فإن $q_1 = \sqrt{36} = 6$

والآن : فائض المستهلك يساوي :

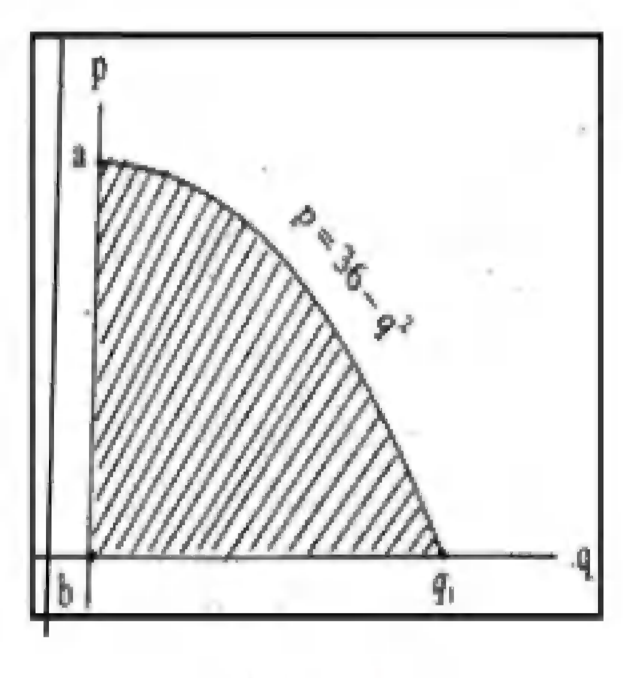
$$cs = \int_0^6 (36 - q^2) - (6)(0)$$

$$= 36q - \frac{1}{3}q^3\Big|_0^6 - (0)$$

$$= 36(6) - 72$$

$$\therefore cs = 144$$

ويبدوا واضحاً أن المساحة تحت المنحنى برمتها هي فائض المستهلك والمحددة بـ($a\,q_1\,b$) وذلك لكون البضاعة بلا مقابل (مجاناً) كما موضح في (2-9) أدناه.



شكل رقم (9-2)

ملاحظـة :

في سوق الاحتكار حيث يتحكم المنتج في السوق فيقوم بتحديد الكميات المعروضة والسعر الذي يحقق له أقصى الأرباح وفي سوق كهذا إذا كانت دالة الطلب معروفة فبالإمكان حساب فائض المستهلك إذا كانت التكاليف الحدية للمنتج معروفة.

مثـال (5):

تتحدد الكميات المباعة والسعر في ظل سوق الاحتكار بدالتي الطلب والتكاليف الحدية الآتيتين :-

$$p = 12 - q^2$$

$$\frac{dp}{dq} = 4 + 2q$$

على التوالي والمطلوب حساب فائض المستهلك.

الجـواب:

تتحقق أقصى الأرباح عندما MR =MC وحيث أن العائدات الحدية (MR) يمكن اشتقاقها من دالة الطلب كالآتي :

$$R = q(12 - q^2)$$

$$= 12q - q^3$$

$$\therefore MR = \frac{dR}{dq} = 12 - 3q^2$$

والآن : $MR = MC$

$$12 - 3q^2 = 4 + 2q$$

$$3q^2 + 2q - 8 = 0$$

$$(3q-4)(q+2)$$

$$q = \frac{4}{3}$$

أو : $q = -2$ تهمل

ولهذا فإن :

$$p_1 = \frac{92}{9}, q_1 = \frac{4}{3}$$

والآن فائض المستهلك يساوي :

$$cs = \int_0^{4/3} (12 - q^2)dq - (\frac{4}{3})(\frac{92}{9})$$

$$= 12q - \frac{1}{3}q^3 \Big|_0^{4/3} - \frac{368}{27}$$

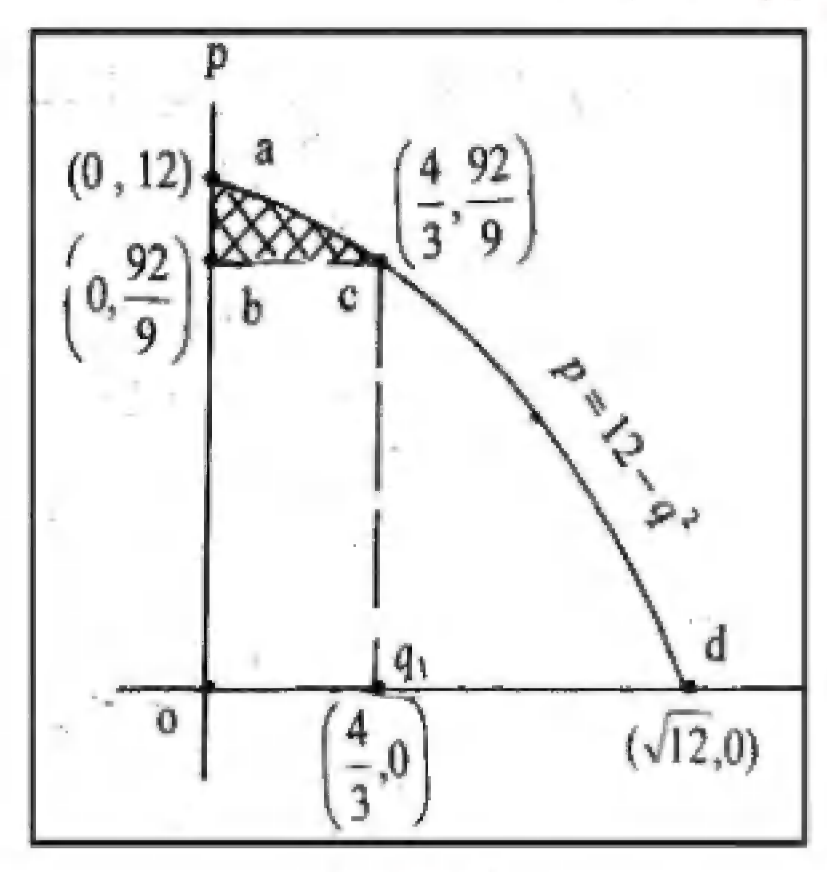
$$= 12(\frac{4}{3}) - \frac{1}{3}(\frac{4}{3})^3 - \frac{368}{27}$$

$$= \frac{48}{3} - \frac{64}{81} - \frac{368}{27}$$

$$= \frac{128}{81}$$

$$\therefore cs \approx 1.58$$

كما موضح في الشكل رقم (10-2)



شكل رقم (10-2)

8-2 فائض المنتج Producer`s Surplus

ذكرنا فيما سبق بان دالة العرض $p = f(q)$ تبين مقدار الكميات التي تجهز من سلعة معينة عند مستويات مختلفة من الأسعار وإذا كانت الكميات المجهزة من تلك السلعة مقابل السعر p_1 هي q_1 فأن المنتجين الذين كانوا قد خططوا لتجهيز السلعة أعلاه بسعر يقل عن سعر السوق (p_1) فائضاً يسمى فائض المنتج لأنهم عملياً سيبيعونها بسعر أكثر من السعر الذي خططوا له .

وما يحققه المنتجون من (فائض المنتج) يمكن حسابه عن طريق استخراج قيمة المساحة فوق منحنى العرض وتحت الخط $p = p_1$ وتقدر هذه المساحة رياضياً بالصيغة الآتية:

$$ps = q_1 p_1 - \int_0^{q_1} f(q)dq \quad = \text{فائض المنتج يساوي}$$

حيث أن دالة العرض هي $p = f(q)$

مثال (1):

إذا كانت دالة العرض لسلعة معينة في السوق هي :-

$$p = 4 + q^2$$

وكان السعر مثبت عند : $p_1 = 20$

جد فائض المنتج .

الجواب:

حيث أن :

$$p_1 = 20$$

$$\therefore q_1 = \sqrt{20 - 4}$$

$$q_1 = 4$$

فائض المنتج :

$$ps = q_1 p_1 - \int_0^{q_1} f(q)dq$$

$$= (4)(20) - \int_0^4 (4 + q^2)dq$$

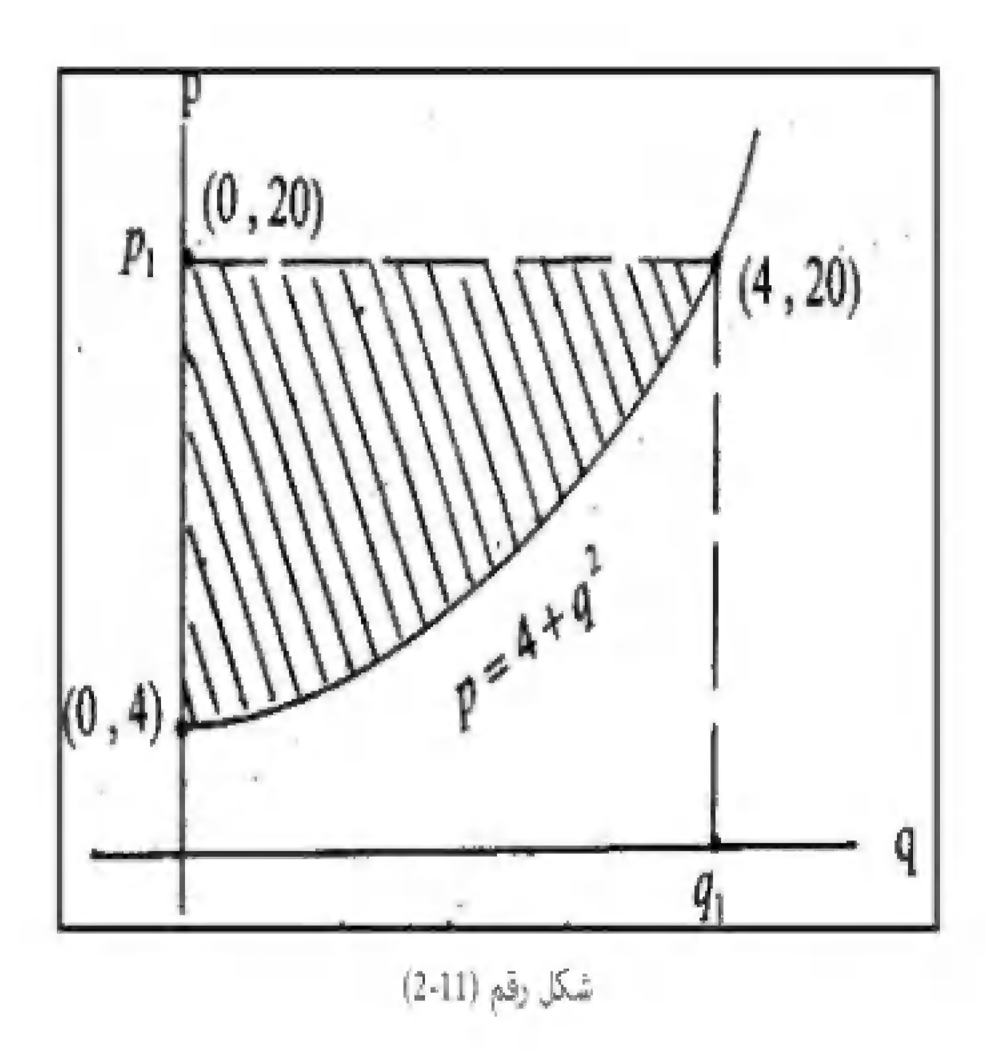
$$= 80 - (4q + \frac{1}{3}q^3)\Big|_o^4$$

$$= 80 - (16 + \frac{64}{3}) - (0)$$

$$\therefore ps = \frac{128}{3}$$

كما مبين في الشكل رقم (2-11) :

الجزء الثالث



شكل رقم (2-11)

مثال (2):

تتحدد الكميات المطلوبة والأسعار المناظرة لها في ظل سوق المنافسة التامة بدالتي الطلب والعرض التاليتين :

$$P = 24 - q^2$$

$$P = 6 + 3q$$

على التوالي . جد فائض المنتج المتحقق .

الجواب :

يتحقق توازن السوق عندما : الطلب = العرض أي أن :

$$24 - q^2 = 6 + 3q$$

$$q^2 + 3q - 18 = 0$$

$$(q + 6)(q - 3) = 0$$

أما $q = 3$ أو $q = -6$ (تهمل)

إذن يتحقق توازن السوق عندما : $q_1 = 3$

$$p_1 = 24 - (3)^2 = 15$$ و

والآن : فائض المنتج :

$$ps = (3)(15) - \int_0^3 (6 + 3q)dq$$

$$= 45 - \left(6q + \frac{3}{2}q^2\right)_0^3$$

$$= 45 - \frac{63}{2}$$

$$\therefore ps = \frac{27}{2}$$

ويمكن الاستفادة من العلاقة الخطية لدالة العرض في حساب فائض المنتج هندسيا حيث يلاحظ أن المساحة المحددة بـ $\int_0^3 (6 + 3q)dq$ ما هي إلا مساحة شبة المنحرف (maq_1o) والتي تساوي :

الجزء الثالث

$$maq_1o = \frac{1}{2}h(b_1 + b_2)$$

حيث أن: h = الارتفاع = 3

b_1 = القاعدة الأولى = 6

b_2 = القاعدة الثانية =15

$$\therefore maq_1o = \frac{1}{2}(3)(6 + 15)$$

$$= \frac{3}{2}(21)$$

$$= \frac{63}{2}$$

وحيث أن فائض المنتج = p_1am ويساوي :

$$p_1ap_1o - maq_1o$$

وإن :

$$p_1aq_1o = 15(3) = 45$$

فائض المنتج = $\therefore ps = 45 - \frac{63}{2}$

(وهي نفس النتيجة) $= \frac{27}{2}$

أو يمكن حساب فائض المستهلك كونه مساحة Δp_1am والتي تساوي :

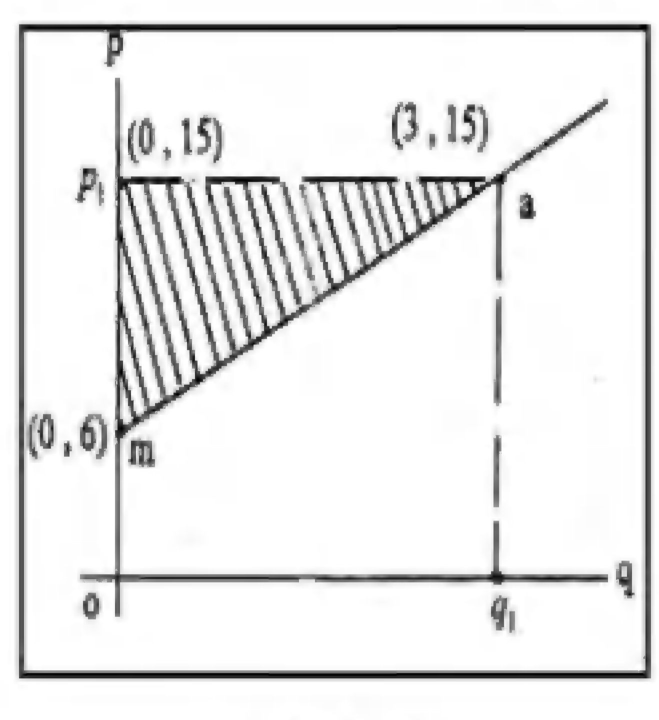
$$p_1m.p_1a \quad \Delta p_1am = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(15-6)3$$

$$= \frac{27}{2}$$

$$\therefore ps = \frac{27}{2}$$

كما مبين في الشكل رقم (2-12):



شكل رقم (2-12)

مثال (3):

في سوق المنافسة التامة لسلعة ما كانت دالة الطلب ودالة العرض على التوالي كالآتي:-

$$p = 20 - 3q^2$$

$$p = 2q^2$$

احسب فائض المستهلك وفائض المنتج .

الجواب:

توازن السوق يتحقق عندما يكون: الطلب = العرض كما موضح في أدناه:-

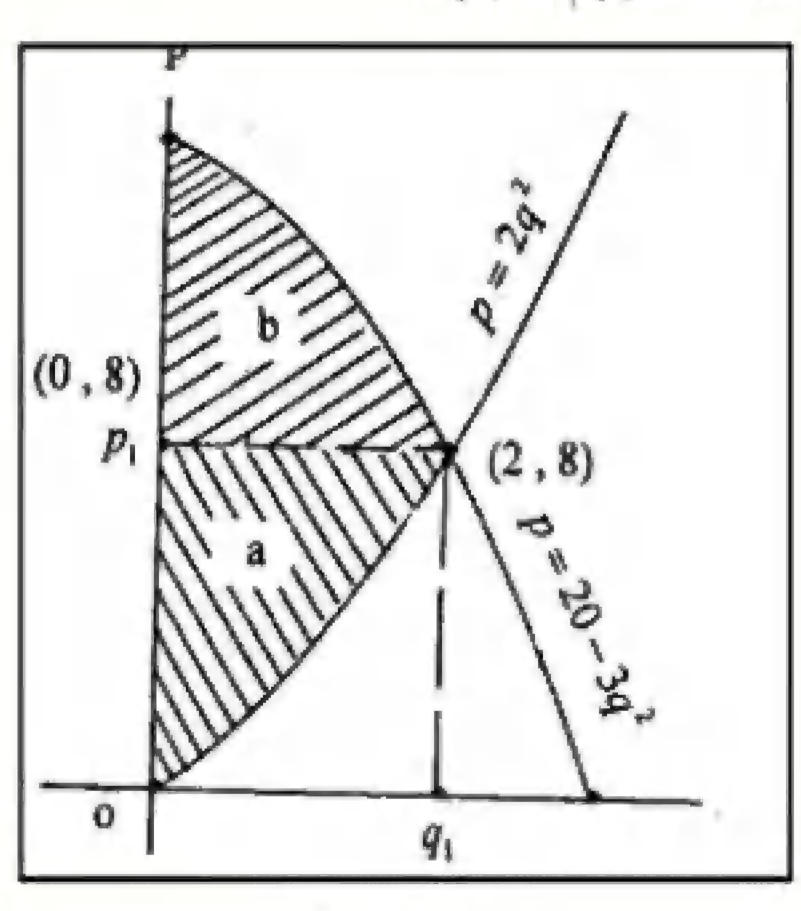
$$20 - 3q^2 = 2q^2$$

$$5q^2 - 20 = 0$$

$$5(q^2 - 4) = 0$$

$$\therefore q_1 = 2 \quad , \quad p_1 = 8$$

والآن دعنا نلاحظ الشكل رقم (2-13) أولاً :



شكل رقم (2-13)

ثم لنحسب فائض المنتج :-

فائض المنتج :

$$ps = (2)(8) - \int_0^2 (2q^2)dq$$

$$= 16 - \frac{2}{3}q^3 \Big|_0^2$$

$$= 16 - \frac{2}{3}(2)^3$$

$$= \frac{32}{3}$$

وهي المساحة (a) الموضحة في الشكل (2-13)

أما فائض المستهلك :

$$cs = \int_0^2 (20 - 3q^2)dq - (2)(8)$$

$$= 20q - q^3 \Big|_0^2 - 16$$

$$= 20(2) - (2)^3 - (0) - 16$$

$$\therefore cs = 16$$

وهي المساحة (b) الموضحة في الشكل (2-13)

9-2 القيمة الحالية Present Value

يعتبر مفهوم القيمة الحالية للنقود مفهوما أساسيا" في نظرية رأس المال وتحليلات الاستثمار . ويقصد بهذا المفهوم حساب القيمة الحالية أو القيمة المخصومة لمبلغ معين من المال الذي سيتوفر في المستقبل . ولتوضيح ذلك لنأخذ الفرضية الآتية :-

إذا كان معدل الفائدة السائدة (I) في المائة فان القيمة الحالية (y)لمبلغ من المال يتوفر بعد سنة من الآن ويرمز له بـ(a) تكون كالآتي :

$$y = \frac{a}{1+i} \qquad (2\text{-}9)$$

ويمكن كتابة المعادلة كالآتي :

$$a = y(1+i)$$

وواضح من المعادلة أعلاه أن القيمة المستقبلية تساوي قيمة المال الحالية مضافا إليها الفائدة التي يستحقها هذا المال لمدة سنة واحدة أي (yi) . أما إذا أردنا أن نحسب القيمة الحالية لمال معين حسب العلاقة (2-9) قيمته بعد (t) من السنوات من الآن فان العلاقة المذكورة تصبح :

$$y = \frac{a}{(1+i)^t} \qquad (2\text{-}10)$$

ويشار في بعض الأحيان إلى (y) بأنها القيمة المخصومة للمبلغ (a) وإذا ما كانت الفائدة تدفع (n) من المرات في السنة وليس مرة واحدة ، فان العلاقة (2-10) تعاد كتابتها كالآتي :

$$y = \frac{a}{(1+\frac{i}{n})^{nt}} \qquad (2\text{-}11)$$

حيث أن الفائدة التي تضاف لكل جزء من السنة هي (i/n) وتحسب على أساس الفائدة السنوية مقسومة على عدد الفترات الجزئية (n) في السنة وبذلك تصبح فترة الخصم (nt)أي عدد أجزاء السنة مضروبة في عدد سنوات الخصم . ولنفترض الآن بان الفائدة تضاف بشكل مستمر وليس بشكل متقطع في نهاية كل فترة لهذا فان (n) ستزداد بلا حدود ولغرض حساب القيمة الحالية في العلاقة (2-11) بصيغتها المستمرة نعيد كتابة المقدار $(1+\frac{i}{n})^{nt}$ كما يأتي:

$$\left[(1+\frac{i}{n})^{n/i}\right]^{it} \qquad (2\text{-}12)$$

وسعياً للاختصار لتكن ($k=\frac{n}{i}$) وعلى هذا الأساس يصبح المقدار أعلاه كما يلي:

$$\left[(1+(\frac{1}{k})^{k}\right]^{it} \qquad (2\text{-}13)$$

وكما مر بنا سابقاً أن :

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n}=e$$

وهي نفس e المستخرجة من المقدار $(1+\frac{1}{k})^{k}$ وحيث أن $k\to\infty$ عندما $n\to\infty$ وبذلك

يمكن إعادة كتابة العلاقة (2-13) كالآتي: e^{it} وعلى أساسها تصبح العلاقة (2-11) كالآتي :

$$y=\frac{a}{e^{it}}=ae^{-it} \qquad (2\text{-}14)$$

ومن المبادئ الأخرى لنظرية رأس المال وتحليلات الاستثمار ذلك المبدأ الذي يعني بالقيمة الحالية لتدفقات المداخيل المستقبلية $a_1, a_2, ... a_n$ حيث يمكن تحديد قيمة رأس المال ل (t) من المداخيل المستقبلية a_t (t=1,2,...n), بالمعادلة الآتية :

$$y=\sum_{t=1}^{n}\frac{a(t)}{(1+i)^{t}} \qquad (2\text{-}15)$$

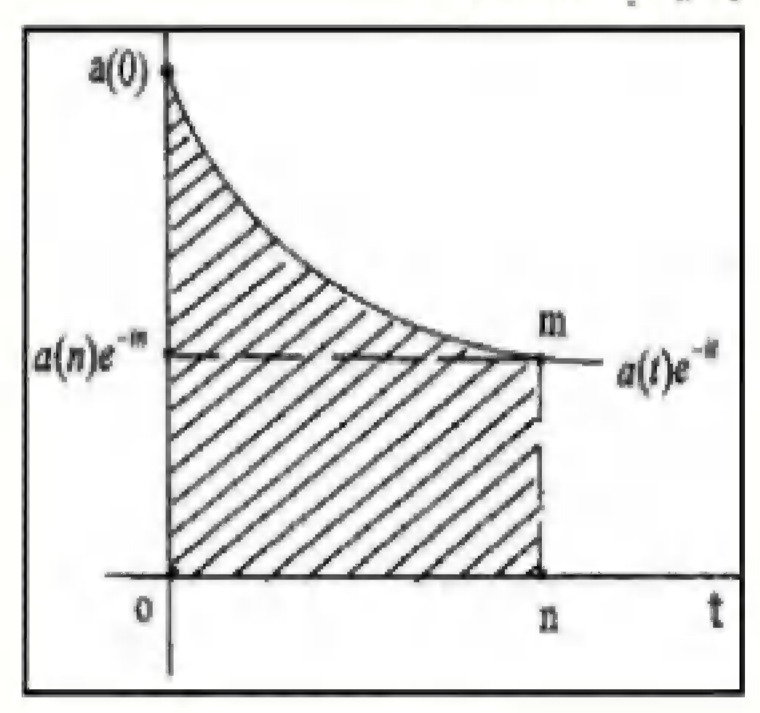
وعلى افتراض أن سعر الفائدة (i) يبقى ثابتا خلال الفترة الزمنية المعنية.ومن العلاقة (2-11) والعلاقة (2-14) وبافتراض أن الفائدة تضاف باستمرار يمكن كتابة العلاقة (2-15) لـ (n) من الفترات الزمنية كالآتي:-

القيمة الحالية تساوي :

$$pv = \int_0^n a(t) e^{-it} dt \qquad (2\text{-}16)$$

$$= a(t) \int_0^n e^{-it} dt$$

حيث تشير a(t) إلى دالة مستمرة للزمن (t) ويبدو الفرق واضحا بين حساب القيمة الحالية لمجموع أموال تتوفر خلال (n) من الفترات الزمنية مستقبلا اعتبارا من الآن وبالصيغة $a(n)e^{-in}$ والقيمة الحالية لتدفقات مستمرة من الأموال المستقبلية خلال (n) من الفترات الزمنية والشكل رقم (2-14) يوضح لنا الفرق بين الحسابين حيث يظهر الحساب الأول كإحداثي عند النقطة t = n أما الحساب الثاني فهو المساحة تحت المنحنى المبينة في الشكل (2-14) .



شكل رقم (2-14)

مثال (1):

يتناقص تدفق تيار من الدخل باستمرار عبر الزمن وذلك وفق نسبة هي $100e^{-3t}$ سنويا وخلال (n) من السنوات من الآن . ضع صيغة رياضية لحساب قيمة رأس المال الذي يمثل هذه التدفقات من الدخول من الآن وحتى (100) سنة إذا كانت نسبة الفائدة 5% سنوياً وتحتسب مرة في السنة.

الجواب

القيمة الحالية تساوي : $pv = y = \int_0^n a(t)e^{-it}\,dt$

وحيث أن رأس المال = a = 100 , i =5% , n = 100

$$\therefore\ pv = 100\int_0^{100} e^{-3(0.05)t}\,dt$$

$$= 100\int_0^{100} e^{0.05}\,dt$$

ومن التطبيقات المهمة للقيمة الحالية هو استخراج قيمة الأرض بمقارنتها بسعر الفائدة السائد وذلك باستخدام الصيغة الآتية :

قيمة الأرض تساوي: $LV = \dfrac{R}{i}$ (2-17)

حيث أن (LV) تشير إلى قيمة الأرض و(R) إلى الإيجار الذي يحصل عليه صاحب الأرض أما (i) فهو سعر الفائدة السائد في السوق . ويمكن تكييف العلاقة (2-17) لتقترب من مفهوم العلاقة (2-16) وكما يأتي :

$$LV = \int_0^{\infty} \mathrm{Re}^{-it}\,dt \qquad (2\text{-}18)$$

ويشير (R) هنا إلى الإيجار الذي يستلمه صاحب الأرض في كل فترة زمنية ولكن بما أن إيجار الأرض يمتد لفترة غير محددة (∞) لان الأرض لا تندثر لذلك فان العلاقة (2-18) تؤول مرة ثانية إلى $\dfrac{R}{i}$ إذا ما أكملنا عمليات التكامل عليها وكما يلي :

$$R\int_0^{\infty} e^{-it}\,dt = R\left[-\frac{1}{i}e^{-it}\right]_0^{\infty} = R\left(0+\frac{1}{i}\right) = \frac{R}{i}$$

دعنا نأخذ مثالا على ذلك :

مثال:

تدر قطعة ارض دخلا إيجارياً ثابتاً قدرة (120) وحدة نقدية في السنة . ما هي قيمة الأرض إذا كان معدل سعر الفائدة 6% سنويا .

الجواب:

$$Lv = \frac{R}{i}$$

$$= \frac{120}{0.06}$$

$$= 120(\frac{100}{6})$$

$$= 2000$$

10-2 قانون باريتو في توزيع الدخل
Pareto`s Law of Distribution of Income

تناولنا في الفصل الثالث الفقرة (2-8) قانون باريتو في توزيع الدخل كمثال عن الدوال الأسية وذكرنا بان صيغة هذا القانون هي :

$$N = ax^{-b}$$

حيث أن (N) تمثل ذلك العدد من أفراد المجتمع الذي حجم سكانه (a) والذين تزيد دخولهم عن (x) أما (b) فهي معلمة سكانية عادة ما تساوي (1.5) تقريباً.

وتقدم لنا عملية التكامل تطبيقاً مفيداً لهذا القانون بالإضافة إلى ما شرحناه سابقاً. ومن هذه التطبيقات الصيغة التي تحدد لنا عدد مستلمي الدخل بين الدخل (y_1) والدخل (y_2) وحسب الصيغة الآتية :

$$\int_{y_1}^{y_2} ax^{-b}dx = a\left(\frac{1}{-b+1}\right)\left(\frac{1}{x^{b-1}}\right)\Big|_{y_1}^{y_2}$$

$$= \frac{a}{-b+1}\left[y_2^{-b+1} - y_1^{-b+1}\right]$$

مثال (1):

جد عدد الأفراد الذين تقع دخولهم بين (100-150) في مجتمع يبلغ عدد سكانه (5000000) نسمة.

الجواب:

$$N_{100-150} = \int_{100}^{150} 5000000 \quad x^{-1.5}dx$$

$$= \frac{5000000}{-1.5+1}\left[150^{-1.5+1} - 100^{-1.5+1}\right]$$

$$= \frac{5000000}{-0.5}\left[150^{-0.5} - 100^{-0.5}\right]$$

$$= -10000000\left[\frac{1}{\sqrt{150}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right]$$

$$= -10000000\left[\frac{1}{12.25} - \frac{1}{10}\right]$$

$= 183674$ فرداً

مثال (2):

ما عدد الذين تقع دخولهم بين (100-400) في المثال (1).

الجواب:

$$N_{100-400} = \int_{100}^{400} \frac{5000000}{-1.5+1}\left[400^{-1.5+1} - 100^{-1.5+1}\right]$$

$$= -10000000\left[\frac{1}{\sqrt{400}} - \frac{1}{\sqrt{100}}\right]$$

$$= -10000000\left[\frac{1}{20} - \frac{1}{10}\right]$$

$$= 500000$$ فرداً

وقد يتطلب الأمر حساب حجم الدخل الذي يزيد عن حجم دخل معين ولنتناول في البداية التحليل الرياضي لهذه المسألة:

خذ قانون باريتو:

$$N = ax^{-b}$$

والآن: $dN = a(-b)x^{-b-1}dx$

دع: $Ndx = -dN = abx^{-b-1}dx$

حيث تشير dN هنا إلى تغير صغير في عدد السكان عندما يحدث تغيراً في مستوى الدخل. أي عندما يزداد مستوى الدخل ينخفض هذا العدد. ولهذا فإن مجموع الدخل عند حجم السكان عدده (x) يكون :

$$xNdx = abx^{-b}dx$$

لذلك فان مجموع الدخل الذي يزيد عن (y) يكون:

$$Ty = \int_{y}^{\infty} xNdx = \int_{y}^{\infty} abx^{-b}dx$$

$$= \frac{ab}{b-1}y^{1-b}$$

<u>مثال:</u>

جد مجموع الدخل الذي يزيد عن (225) في مجتمع عدد سكانه (15000000) نسمة.

الجواب:

$$Ty = \frac{ab}{b-1} y^{1-b}$$

$$= \frac{15000000(1.5)}{1.5-1}(225)^{1-1.5}$$

$$= 45000000(\frac{1}{\sqrt{225}})$$

$$= 45000000(\frac{1}{15})$$

$= 3000000$ وهو مجموع الدخل

تمارين (1-2)

1- إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة هي:

$$p = 25 - q^2$$

جد فائض المستهلك عندما $q = 4$

2- إذا أعطيت دالة طلب بالصيغة الآتية:

$$p = 6 + 2q^2$$

جد فائض المنتج إذا كانت $p_1 = 24$

3- قدرت دالتي الطلب والعرض في سوق معينة فوجدت كما يأتي:

$$p = 12 - q^2$$

$$p = 3 + 4q$$

على التوالي والمطلوب إيجاد كل من فائض المستهلك وفائض المنتج.

4- في إحدى الأسواق المحتكرة من قبل مجهز معين كانت الكميات المباعة والأسعار محددة بدالة الطلب: $p = 32 - q$ أما التكاليف الحدية فقد كانت:

$$\frac{dp}{dq} = 5 + \frac{1}{2}q$$

وذلك كخطة من المجهز لتحقيق أقصى الأرباح. والمطلوب إيجاد فائض المستهلك.

5- أعطت نتائج الدراسات في مشروع معين مؤشرات لدالة التكاليف الحدية (MC) والعائدات الحدية (MR) كما مبين أدناه.

$$MC = \frac{dc}{dp} = 12 - 3p - 3p^2$$

$$MR = \frac{dR}{dp} = 20 - 4p$$

جد مستوى الإنتاج الذي تتحقق عنده أقصى الأرباح مفترضين سيادة سوق المنافسة التامة.

6- في ظل سوق المنافسة التامة وجد أن دالتي العرض والطلب كانت:

$$p = 6 + 2q + \frac{1}{4}q^3$$

$$p = 21 - \frac{1}{3}q^2$$

المطلوب إيجاد فائض المستهلك وفائض المنتج.

7- أشارت البحوث التي جرت في مصنع معين أن دالة التكاليف الحدية للوحدة الواحدة المنتجة من السلعة (q) كانت.

$$MC = \frac{dc}{dq} = 0.6 - 0.9q^2$$

جد دالة التكاليف الكلية إذا علمت أن التكاليف الثابتة (40) وحدة.

8- كان مستوى العائدات الحدية في معمل للسجاد حسب الصيغة الآتية:

$$MR = \frac{dR}{dq} = 8 - 2q$$

جد دالة العائدات الكلية ودالة الطلب.

9- اقتنت شركة للكهرباء مولداً جديدا وقدرت عمره الإنتاجي بـ (8) سنوات وكان معدل الاندثار يحسب بموجب المعادلة الآتية:

$$D = t^2 e^t dt$$

استخرج مجموع المبالغ التي ينبغي رصدها في حسابات الشركة خلال الفترة أعلاه لتغطية كلفة الاندثارات.

10- قدر الميل الحدي للاستهلاك في مجتمع معين بما يلي:

$$MPC = \int 0.65 + 4y^{1/3}$$

جد دالة الاستهلاك إذا كان مستوى الاستهلاك (15) عندما يكون مستوى الدخل القومي صفراً.

11- بافتراض أن معدل الفائدة 4% وان الفائدة تضاف إلى الرصيد كل ثلاثة أشهر، جد القيمة الحالية لمبلغ (100) دينار يتوفر بعد ثلاثة سنوات من الآن.

الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية

Differential Equations



المعادلات التفاضلية

Differential Equations

1-3 المقدمة

تناولنا في الفصلين الرابع والخامس من الجزء الثاني التفاضل واستخداماته في التحليلات الكمية للظواهر الاقتصادية وقد لاحظنا أن كثير من العلاقات سواء كانت بين متغير وآخر أو بين مجموعة من المتغيرات تعرض عادة بشكل معدلات تبدل في متغير أو أكثر كدالة لمعدلات تبدل في متغيرات أخرى أو في قيم تلك المتغيرات ، فالمعدل الذي عنده يقترب السعر من مستوى التوازن يعتمد على التغيرات في كميات العرض وكميات الطلب .

وتعرض معدلات التغير (التبدل) عادة بصيغتين رياضيتين تعتمدان أساسا على الوقت فيما إذا كان مستمراً أو متقطعاً. فإذا كانت التغيرات مستمرة فمعدلات التغير تعالج كمشتقات تحتويها معادلات تسمى المعادلات التفاضلية.

الفصل الثالث

أما إذا كانت التغيرات متقطعة في نقاط معينة من الوقت أو كونها متوسط تغيرات عبر فترة من الزمن ، فان معادلات التغير تعالج هنا كفروقات في قيم المتغيرات عند نقاط مختلفة من الزمن ونسمي المعادلات التي تعالج هذه الفروقات معادلات الفروق والتي سنأتي عليها في فصل لاحق .

ويظهر مما سبق أن المعادلات التفاضلية ما هي إلا نهاية معادلات الفروق عندما تقترب الفترة الزمنية أو متوسط التغير في المعادلات الأخيرة من الصفر .

2-3 تعريف

اتضح من خلال المقدمة القصيرة أعلاه بان المقصود بالمعادلة التفاضلية هي المعادلة التي تتضمن مشتقات أو تفاضلات دوال ذات متغير واحد أو أكثر وتصنف المعادلات التفاضلية طبقا لنوع الدرجة والرتبة كالآتي :

أ- المعادلة التفاضلية الاعتيادية **Ordinary Differential Equation**

وهي المعادلة التفاضلية التي تتضمن مشتقات لدالة مجهولة بالنسبة لمتغير مستقل واحد .

ب- المعادلة التفاضلية الجزئية **Partial Differential Equation**

وهي المعادلة التفاضلية التي تتضمن مشتقات جزئية لمعادلة مجهولة ذات متغيرين مستقلين أو أكثر.

ويقال للمعادلة التفاضلية ذات الرتبة (n) إذا كانت أعلى مشتقة ظهرت في المعادلة هي المشتقة (n) . إما درجة المعادلة التفاضلية فتحدد من خلال أعلى قوة مرفوعة إليها أعلى رتبة للمشتقة التي ظهرت في المعادلة.

أمثلة

حدد نوع المعادلة ودرجتها في المعادلات التفاضلية الآتية :

أ- $\frac{dy}{dx} = 5x$

ب- $y = \frac{d^2y}{dx^2}$

ج- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 9 + y^2$

د- $xdx + ydy = 0$

هـ- $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} = y$

و- $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0$

ز- $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2y$

الجواب :

أ- $\frac{\partial y}{\partial x} = 5x$ معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.

ب- $y = \frac{d^2y}{dx^2}$ معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الثانية والدرجة الأولى .

ج- $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 9 + y^2$ معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الثالثة.

د- $xdx + ydy = 0$ معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى.

هـ- $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u} = y$ معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى .

الفصل الثالث

و- $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0$ معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثانية والدرجة الأولى .

ز- $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2y$ معادلة تفاضلية اعتيادية من المرتبة الثانية الدرجة الثانية

ويظهر واضحاً من الأمثلة أعلاه أن المعادلة التفاضلية الاعتيادية يمكن كتابتها بصيغتين :

الأولى الصيغة التفاضلية والثانية صيغة المشتقة فالصيغة $\frac{dy}{dx} = 4X$ هي صيغة المشتقة . أما إذا

كتبت بالصيغة $dy=4xdx$ فهي الصيغة التفاضلية .

3-3 حل المعادلات التفاضلية الاعتيادية

تحل المعادلة التفاضلية الاعتيادية عن طريق تحويلها إلى دالة لا تحتوي على مشتقات أو تفاضلات تفي بمتطلبات المعادلة التفاضلية . ويمكن لهذا الحل أن يكون دالة صريحة أو ضمنية وعلى هذا الأساس فان :

أ- الحل العام لمعادلة تفاضلية ذات المرتبة (n) هو الحل الذي يحتوي على (n) من الثوابت العشوائية المستقلة لعملية التكامل .

ب- الحل الخاص لمعادلة تفاضلية هو الحل الذي يؤخذ من الحل العام وذلك بإعطاء قيم محددة للثوابت العشوائية التي ظهرت في الحل العام .

ولما كانت ثوابت التكامل للمعادلة التفاضلية تحدد بالشروط الإبتدائية أو شروط الحدود . فالشروط التي تأخذ صيغة ($y = y_0$ عندما $x = x_0$) تسمى بشروط الحدود (boundary conditions) أما الحالة الخاصة من هذه الشروط التي تأخذ صيغة ($x = x_0$) عندما y=0 فتسمى بالشرط الابتدائي.

وهكذا يظهر لنا أن حل المعادلة التفاضلية يحتاج إلى إجراء عملية التكامل لها وعندما تكون هناك حاجة للحل الخاص لابد من إيجاد الحل العام والحصول على معلومات حول الثوابت من خلال الشروط الابتدائية للمسالة.

دعنا نتناول بعض الأمثلة قبل الدخول في شرح طرق الحلول :

مثال (1)

بين بأن $y = x^2 - x + c$ هو حل للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} + 3 = 2x + 2$$

الجواب

إذا أخذنا $y = x^2 - x + c$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 1$$

والآن نعوض قيمة $\frac{dy}{dx}$ بما يقابلها في المعادلة التفاضلية فينتج :

$$2x-1+3=2x+2$$
$$2x+2=2x+2$$
$$\therefore y=x^2-x+c$$

(هو الحل)

مثال (2) :

برهن على أن الدالة الآتية هي حل للمعادلة التفاضلية المبينة أدناه :

الدالة : $y=x^3-2x^2+c$

المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx}=3x^2-4x$

الجواب :

نأخذ مشتقة الدالة y فنحصل على :

الفصل

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-4x$$

الثالث

إذن الدالة y هي حل للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}$

مثال (3)

اثبت أن الدالة $x^2-cy=c^2$ هي حل للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=2y\frac{dy}{dx}+4x$$

الجواب

نأخذ الدالة ونعيد الصياغة لتصبح كالآتي :

$$y=\frac{x^2}{c}-c$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{c}$$

ونعيد كتابة المعادلة التفاضلية كالآتي :

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2y\frac{dy}{dx}=4x$$

والآن نعوض فنحصل على :

$$x\left(\frac{2x}{c}\right)^2-2\left(\frac{x^2}{c}-c\right)\left(\frac{2x}{c}\right)=4x$$

$$\frac{4x^3}{c^2}-\frac{4x^3}{c^2}+\frac{4cx}{c}=4x$$

$$4x=4x$$

$$\therefore y=x^3-2x^2+c$$

(وهو الحل للمعادلة التفاضلية)

4-3 حل المعادلات التفاضلية من المرتبة الأولى والدرجة الأولى Solution of differential Equations of the first order and first degree

يمكن كتابة المعادلة التفاضلية ذات المرتبة الأولى والدرجة الأولى بالصيغة الآتية:

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y) \qquad (3\text{-}1)$$

أو تكتب بالصيغة التفاضلية الآتية:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (3\text{-}2)$$

الجزء الثالث

ونشير إلى أن الصيغة (3-1) يمكن أن تحل باستخدام طرق التفاضل الاعتيادية إذا F(x,y) ثابتة أو دالة فقط لـ (x) أما إذا كانت F(x,y) دالة للمتغيرين (x,y) فنحتاج إلى الطرق التي سنأتي عليها لإيجاد حل للمعادلة التفاضلية المعنية .

ويلاحظ في المعادلة (3-1) أن y هو المتغير المعتمد وx المتغير المستقل ولهذا فان الحل يوضع بصيغة y دالة x بالإضافة إلى ثابت عشوائي أما في المعادلة (3-2) فان العلاقة بين (x,y) علاقة ضمنية ولهذا يبقى اختيار أي منهما المتغير المعتمد وأي منهما المتغير المستقل حسب الحاجة .

أما طرق حل المعادلات التفاضلية من أية درجة أو مرتبة يعتمد على دقة تصنيفها بشكل صحيح . والآن نستعرض حلول المعادلات التفاضلية من الدرجة الأولى والمرتبة الأولى ويمكن توزيعها حسب نماذجها كالآتي:

1- المعادلات التفاضلية المنفصلة Separable Differential Equations

وذلك عندما تكون M دالة فقط لـ x , N دالة لـy في العلاقة (3-2) وبذلك فان المعادلة تكتب بالصيغة الآتية :

الفصل

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

الثالث

2- المعادلات التفاضلية المتجانسة Homogeneous Differential Equations

وذلك عندما تكون N,M دالتين متجانستين بنفس الدرجة من التجانس .

3- المعادلات التفاضلية التامة Exact Differential Equations

إذا أخذنا المشتقة الكلية للدالةF(x,y) كالآتي :

$$df(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

وعندها يكون للدالة التفاضلية (3-2) :

فهذا فإن المعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=0 \qquad (3\text{-}4)$$

لها حل هو: F(x , y) = C وتسمى حينئذ بالمعادلة التفاضلية التامة .

4- المعادلات التفاضلية الخطية

تكون المعادلة التفاضلية خطية إذا كان كل من الآتي من الدرجة الأولى :

$y,\frac{dy}{dx}$ أو $x,\frac{dx}{dy}$ وبذلك تكون في الصيغة الآتية :

$$\frac{dy}{dx}+yp(x)=Q(x) \qquad (3\text{-}5)$$

أو

$$\frac{dx}{dy}+xp(y)=Q(y) \qquad (3\text{-}6)$$

5- المعادلات التفاضلية الخطية في دالة y أو في دالة x

Differential Equation Linear In A Function Of Y Or In A Function Of X

وذلك عندما تكون المعادلة من الدرجة الأولى في $f(y)$ and $\frac{d}{dy}f(y)$ أو في $f(x)$ and $\frac{d}{dx}f(x)$ فإن المعادلة تأخذ الصيغة الآتية على التوالي :

$$\frac{d}{dy}f(x)+f(y)p(x)=Q(x) \qquad (3\text{-}7)$$

أو

$$\frac{d}{dx}f(x)+f(x)p(y)=Q(y) \qquad (3\text{-}8)$$

والآن سنتناول طرق حل هذه النماذج الخمسة من المعادلات التفاضلية تباعاً.

3-4-1 المعادلات التفاضلية المنفصلة

Separable Differential Equations

قلنا إذا كتبت المعادلة التفاضلية بالصيغة المبينة في (3-3) أي :

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

حيث أن M هي دالة لـ x فقط و N هي دالة لـ y فقط . وعند ذلك يكون المتغيران x , y منفصلين.

ويستخرج حل المعادلة التفاضلية بطريقة التكامل الاعتيادية المباشرة ويلاحظ أن كل من dx , dy هما تفاضلا المتغيرين x , y على التوالي .

والآن لنأخذ بعض الأمثلة :

مثال (1):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

واستخرج الحل الخاص إذا كانت y=3 عندما x=0

الجواب

نقسم طرفي المعادلة التفاضلية على y ونعيد كتابتها بصيغة تفاضلية فنحصل على:

$$\frac{1}{y}dy = 2xdx$$

والآن نكامل :

$$\ln y = x^2 + \ln c$$

لقد اخترنا ln c هنا ليكون ثابت مناسب ولكونه عشوائياً أي أن يكتب (c) بدلاً من ln c وبنقل ln c إلى الطرف الآخر نحصل على :

$$\ln \frac{y}{c} = x^2$$

وهذا هو الحل العام وهو مكافئ للآتي :

$$y = ce^{x^2} \quad \text{أو} \quad \frac{y}{c} = e^{x^2}$$

وبتعويض ما ورد بالشرط الأول : ($y = 3$ إذا كانت $x = 0$) نحصل على :

$$\frac{3}{c} = e^0$$

$$\frac{3}{c} = 1$$

$$\therefore c = 3$$

إذن الحل الخاص يكون :

$$\frac{y}{3}e^{x^2}$$

$$\therefore y = 3e^{x^2}$$

<u>مثال(2) :</u>

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$xy + (1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

<u>الجواب:</u>

نعيد صياغة المعادلة التفاضلية بالخطوات التالية :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{1 + x^2}$$

ويضرب الطرفين بـ $\frac{dx}{y}$ ينتج :

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{x}{1 + x^2}dx$$

وبإعادة الصياغة ينتج :

$$\frac{1}{y}dy + \frac{x}{1 + x^2}dx = 0$$

والآن أصبحت المعادلة تفاضلية منفصلة أي ذات متغيرات منفصلة وبإجراء عملية التكامل لكل منها ينتج :

$$\ln y + \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = c$$

$$\ln(y\sqrt{1+x^2}) = c$$

$$\therefore y\sqrt{1+x^2} = c$$ (وهو الحل العام)

باعتبار $C = e^c$ حيث أن c يمكن أن يكتب بأية صيغة مناسبة مادام هو ثابت عشوائي .

مثال (3)

في معاملات المرونة أظهرت إحدى الدراسات بأنه مرونة y بالنسبة إلى x هي الثابت b وكالآتي:

$$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = b$$

جد y كدالة لـ x

الفصل الثالث

الجواب :

يمكن إعادة صياغة المعادلة التفاضلية (معامل المرونة) :

$\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} = b$ بضرب المعادلة بـ $\frac{dx}{x}$ فينتج :

$$\frac{1}{y}dy = b\frac{1}{x}dx$$

$$\ln y + c_1 = b\ln x + c_2$$

$\ln y - b\ln x = c_3$ حيث أن $c_1 + c_2 = c_3$

$$\ln\left(\frac{y}{x^b}\right) = c_3$$

$$\therefore \frac{y}{x^b} = e^{c_3}$$

ويمكن وضع $e^{c_3} = c$ لأنه متغير عشوائي فينتج :

$$\therefore y = cx^b$$

3-4-2 المعادلات التفاضلية المتجانسة

Homogeneous Differential Equations

تسمى الدالة التفاضلية التي تكتب بالصيغة (2-3)أي :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

دالة متجانسة إذا كانت كل من $M(x,y), N(x,y)$ دوال متجانسة بنفس الدرجة في كل من x, y .

(راجع الفقرة 5-17-1) التي أوضحت بأن الدالة $f(x,y)$ تكون دالة متجانسة من الدرجة (λ) إذا وفقط إذا كانت $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$ حيث أن λ هو أي ثابت.

وعندما تكون الدالة التفاضلية متجانسة فان متغيراتها يمكن فصلها بالتعويض أي أن:

$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv \qquad (3\text{-}9)$$

وبصورة متكافئة مع الصيغة أعلاه إذا كان : X=VY

فإن :

$$dx = vdy + ydv \qquad (3\text{-}10)$$

وتكتب الدالة التفاضلية المستخرجة من(3-9) ، (3-10)على التوالي كالآتي:

$$M(x)dx + N(v)dv = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

أو بالصيغة

$$M(v)dv + N(y)dy = 0 \qquad (3\text{-}12)$$

وتحل هذه المعادلات بطرق التكامل الاعتيادية ويستخرج الحل العام للمعادلة بصيغتها الأصلية بطريقة تعويض قيم v المبينة أدناه :

$v = \frac{y}{x}$ أو $v = \frac{x}{y}$ لغرض الوصول إلى حل المعادلة التفاضلية المنفصلة .

مثال (1) :

حل المعادلة التفاضلية الآتية : $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

ثم جد الحل الخاص إذا: $y = 3$ عندما $x = 1$

الجواب :

الفصل الثالث

نحول المعادلة إلى الصيغة المذكورة في (9 - 3) كي تصبح متغيراتها منفصلة وذلك بالتعويض بالقيم الآتية :

$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

وقبل التعويض نعيد صياغة المعادلة المطلوب حلها بالمثال بالشكل الآتي :

$$xdy - ydx = 0$$

بالتعويض بالقيم أعلاه ينتج :

$$x(xdv + vdx) - vxdx = 0$$

$$x^2dv + xvdx - xvdx = 0$$

$$\therefore x^2dv = 0$$

وبالقسمة على x2 ينتج :

$$dv = 0$$

والآن أصبحت المعادلة ذات متغير واحد فنكامل لنحصل على :

$$\int dv = 0$$

وحيث أن :

$$\therefore v + c = 0$$

$$y = xv$$

$$v = \frac{y}{x}$$

وبالتعويض ينتج :

$$\frac{y}{x} + c = 0$$

$$y + xc = 0$$

أو $\therefore y = -xc$

(وهو الحل العام)

أما الحل الخاص فنحصل عليه بالتعويض عن قيم :

$x = 1$ ، $y = 3$ فينتج :

$$3 = -(1)c$$

$$\therefore c = -3$$

وبالتعويض في الحل العام بقيمة $c = -3$ نحصل على :

$$y = -x(-3)$$

$$\therefore y = 3x$$

(وهو الحل الخاص)

مثال (2):

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$(x^2+y^2)dx-2xydy=0$$

الجواب:

نعوض بالقيم الآتية :

$$y = vx$$

$$dy=vdx+xdv$$

ما دامت المعادلة متجانسة من الدرجة (2) ينتج عن ذلك :

$$(x^2+v^2x^2)dx-2vx^2(vdx+xdv)=0$$

$$x^2dx+v^2x^2dx-2vx^3dv-2v^2x^2dx=0$$

$$x^2dx-2vx^3dv-v^2x^2dx=0$$

$$x^2(1-v^2)dx-2vx^3dv=0$$

وبتغير إشارة الطرفين ينتج :

$$2vx^3dv+x^2(v^2-1)dx=0$$

وبالقسمة على $x^3(v^2-1)$ ينتج :

$$\frac{2v}{v^2-1}dv + \frac{1}{x}dx = 0$$

والآن أصبحت المعادلة التفاضلية ذات متغيرين منفصلين فنكامل لنحصل على :

$$\frac{1}{2}\ln(v^2-1)+\ln x=c$$

$$\ln x(v^2-1)^{1/2}=c$$

$$x(v^2-1)^{1/2}=c$$

(راجع قواعد اللوغاريتمات الفقرة (3 - 5))

وبتربيع الطرفين ينتج :

$$x^2(v^2-1)=c$$

لاحظ أن c يبقى ثابت عشوائي رغم التغيرات التي تطرأ عليه نتيجة التغيرات التي تطرأ على الطرف الأيمن من المعادلة .

وبالتعويض بقيمة:

$$v=\frac{y}{x}$$

$$x^2(\frac{y^2}{x^2}-1)=c$$

$$y^2-x^2=c$$

أو : $y=(x^2+c)^{1/2}$

(وهو الحل العام)

مثال (3) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y^3dx-x^3dy=0$$

الجواب :

نعوض بـ $y = vx$

$$dy=vdx+xdv$$

في المعادلة التفاضلية مادامت متجانسة من الدرجة (3) فينتج :

$$v^3x^3dx-x^3(vdx+xdv)=0$$

$$v^3x^3dx-x^3vdx-x^4dv=0$$

$$x^3(v^3-v)dx-x^4dv=0$$

$$x^4dv+x^3(v-v^3)dx=0$$

وبالقسمة على $x^4(v-v^3)$ نحصل على :

$$\frac{1}{v-v^3}dv+\frac{1}{x}dx=0$$

والآن نكامل بعد أن أصبحت المعادلة بمتغيرين منفصلين :

$$\frac{1}{3}\ \ln(v-v^3)+\ln x=c$$

$$\ln[x(v-v^3)^{1/3}]=c$$

راجع قواعد اللوغاريتمات الفقرة (5-3) الفصل الثالث :

$$x(v-v^3)^{\frac{1}{3}}$$

وبتكعيب الطرفين :

$$x^3(1-v^3)=c$$

وبالتعويض بقيمة $v=\frac{y}{x}$ ينتج :

$$x^3(\frac{y}{x}-\frac{y^3}{x^3})=c$$

$$x^2y-y^3=c$$

أو $y=(x^2-c)^{\frac{1}{3}}$

(وهو الحل العام)

مثال (4) :

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x+y}$$

الجواب:

نعيد صياغة المعادلة كالآتي :

$$(y+x)dy+(y-x)dx=0$$

وبالتعويض بقيم $y=vx$

$$dy=vdx+xdv$$

بالمعادلة في المثال ينتج :

$$(vx+x)(vdx+xdv)+(vx-x)dx=0$$

$$v^2xdx+vx^2dx+vxdx+x^2dv+vxdx-xdx=0$$

$$x(v^2+2v-1)dx+x^2(1+v)dx$$

وبالقسمة على $x^2(v^2+2v-1)$ ينتج :

$$\frac{1}{x}dx+\frac{v+1}{v^2+2v-1}dv=0$$

والآن أصبحت المعادلة التفاضلية بمتغيرين منفصلين وبإجراء التكامل نحصل على:

$$\ln x+\frac{1}{2}\ln(v^2+2v-1)=c$$

$$\ln[x(v^2+2v-1)^{\frac{1}{2}}]=c$$

$$x(v^2+2v-1)^{\frac{1}{2}}=c$$

$$x^2(v^2+2v-1)=c$$

ملاحظة :

إن c يبقى ثابت عشوائي رغم التغيرات التي تطرأ عليه نتيجة التغيرات التي تطرأ على الطرف الأيمن من المعادلة .

وبالتعويض بـ $v = \frac{y}{x}$ ينتج :

$$x^2\left(\frac{y^2}{x^2} - 2\frac{y}{x} - 1\right) = c$$

$$y^2 - 2xy - x^2 = c$$

أو $$y = (x^2 + 2xy + c)^{\frac{1}{2}}$$

(وهو الحل العام)

مثال (5) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$x^3 - 2y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} = 0$$

الجواب :

نعيد صياغة المعادلة كالآتي :

$$(x^3 - 2y^3)dx + 3xy^2dy = 0$$

ما دامت الدالة متجانسة (من الدرجة 3) نعوض عن القيم التالية فيها:

$$y = vx$$

$$dy = vdx + xdv$$

فينتج :

$$(x^3 - 2v^3x^3)dx + 3v^2x^3(vdx + xdv) = 0$$

$$x^3dx - 2v^3x^3dx + 3v^3x^3dx + 3v^2x^4dv = 0$$

$$(x^3 + v^3x^3)dx + 3v^2x^4dv = 0$$

$$x^3(1+v^3)dx + 3x^4(v^2)dv = 0$$

وبالقسمة على $x^4(1+v^3)$ ينتج:

$$\frac{1}{x}dx + \frac{3v^2}{1+v^3}dv = 0$$

والآن بعد أن أصبحت المعادلة تفاضلية ذات متغيرين منفصلين :

$$\ln x + \frac{1}{3}\ln(1+v^3) = c$$

$$\ln[x(1+v^3)^{1/3}] = c$$

$$x(1+v^3)^{1/3} = c$$

$$x^3(1+v^3) = c$$

$$x^3(1+\frac{y^3}{x^3}) = c$$

$$x^3 + y^3 = c$$

أو

$$y = \sqrt[3]{c - x^3}$$

$$= (c - x^3)^{1/3}$$

(وهو الحل العام)

مثال (6):

جد الحل للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$$

الجواب :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x}{e^y}$$

ومن ثم : $e^y dy - e^x dx = 0$

ويلاحظ أن المعادلة ذات متغيرين منفصلين فنجري تكاملها :

$$e^y - e^x = c$$

(وهو الحل العام)

مثال (7):

جد حل المعادلة التفاضلية الآتية في ضوء الشروط المعطاة :

$$xdx - 4ydy = 0$$

يكون y = 1 عندما x = 6

الجواب :

يلاحظ أن المعادلة متجانسة وذات متغيرين منفصلين فنجري تكاملها مباشرة:

$$\frac{1}{2}x^2 2y^2 = c$$

(وهو الحل العام)

والآن نبحث عن الحل الخاص :

بالتعويض بالقيم المعطاة من x, y نحصل على :

$$\frac{1}{2}(6)^2 - 2(1)^2 = c$$

$$18 - 2 = c$$

$$c = 16$$

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 - 2y^2 = 16$$

وبالضرب في (2) ينتج :

$$x^2 - 4y^2 = 32$$

(وهو الحل الخاص)

3-4-3 المعادلات التفاضلية التامة Exact Differential Equations

عندما بحثنا موضوع المشتقة الكلية لدالة $f(x,y)$ ودعنا نسميها $F(x,y)$ لاحظنا أن صيغة الاشتقاق كانت كالآتي :

$$df(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

ولهذا فإن المعادلة التفاضلية هي :

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial x}dy = 0 \qquad (3\text{-}13)$$

ولهذه المعادلة حل عام $f(x,y) = c$ وتسمى مثل هذه المعادلات بالمعادلات التفاضلية التامة .

ويقال أن المعادلة التفاضلية ذات الصيغة العامة :

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (3\text{-}14)$$

هي معادلة تفاضلية تامة إذا كانت $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ هي المشتقة الكلية لبعض من الدالة $F(x,y)$ بالنسبة إلى x , y على التوالي. وإذا كانت المشتقات الجزئية المختلطة من المرتبة الثانية $F(x,y)$ موجودة ومستمرة.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \qquad (3\text{-}15)$$

ولهذا فإن المعادلة التفاضلية بالصيغة :

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ تكون تامة

إذاً :

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \qquad (3\text{-}16)$$

ويمكن بيان بأن هذا هو شرط كافي لإثبات أن المعادلة تامة فان حلها يمكن استخراجه بإتباع الخطوات الآتية :

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\Leftrightarrow M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

وعندما نتأكد من أن المعادلة تامة فأن حلها العام يمكن استخراجه بأتباع الخطوات الآتية:

1- نكامل $M(x,y)$ بالنسبة إلى x ويكون الثابت الاعتيادي في عملية التكامل عادة $f(y)$ وبذلك نحصل على :

$$F(x,y)=\int M(x,y)dx=G(x,y)+f(y)$$

2- نفاضل المعادلة المستخرجة من (1) أعلاه وهي : $F(x,y)=G(x,y)+f(y)$ بالنسبة إلى y ونقارن ذلك مع $F(x,y)$ الموجودة أصلا في المعادلة التفاضلية المطلوب حلها كي نحصل على قيمة $\frac{\partial}{\partial y}f(y)$ أي:

الفصل الثالث

$$\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}f(y)=\frac{\partial N}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(y)=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial y} \qquad (3\text{-}17)$$

3- نكامل $\frac{\partial}{\partial y}f(y)$ بالنسبة إلى y لنحصل على $f(y)$ أي :

$$\int\frac{\partial}{\partial y}f(y)dy=f(y)$$

ملاحظة :

ليس من الضرورة أن نضع الثابت هنا لأنه سيدخل في الخطوة الأخيرة من الحل كذلك يمكن إجراء التكاملات أولاً مع x بدلاً من y .

4- وبذلك نصل إلى الحل النهائي من الخطوات الثلاثة أعلاه فيكون :

$$f(x,y) = G(x,y) + f(y) + c \qquad (3\text{-}18)$$

مثال (1):

حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$ydx + xdy = 0$$

الجواب:

نلاحظ أن المعادلة تفاضلية تامة :

نعيد كتابة المعادلة بالرموز كما في (3-14)

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ولكي تكون هذه المعادلة تامة يجب أن يتوفر فيها الشرط المبين في العلاقة (3-16) وهو :

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y)dx = \frac{\partial}{\partial x} N(x,y)$$

والآن نجد للاختبار :

$$M(x,y) = y$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 1$$

$$N(x,y) = x$$

$$\therefore \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

∴ توفر الشرط التام .

إذن نستطيع أن نبدأ بحل المسالة حسب الخطوات الأربع أعلاه:

1- نكامل $M(x,y)$ بالنسبة إلى x ونضع الثابت مساويا لـ $f(y)$ وكما يأتي:

لدينا
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$

وبإجراء تكاملها ينتج: $f(x,y) = xy + f(y)$ ويظهر من النتيجة بأن :

$$G(x,y) = xy$$

المذكورة في الخطوة الأولى من طريقة الحل .

$$\therefore \frac{\partial G}{\partial y} = x$$

المذكورة في العلاقة (3-17) والتي نحتاجها في الحل.

2- الآن نفاضل المعادلة المستخرجة بالنسبة إلى y فينتج :

المعادلة هي :

$$F(x,y) = xy + f(y)$$

و
$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + \frac{\partial}{\partial y} f(y)$$

ثم قارن مع F(x,y) في أصل المعادلة التفاضلية والتي تساوى x كي نحصل على قيمة $\frac{\partial}{\partial y} f(y)$

وذلك :

$$\frac{\partial}{\partial y} f(y) = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial y} \qquad (3-19)$$

وحيث لدينا $\frac{\partial G}{\partial y} = x$ كما لدينا $\frac{\partial N}{\partial y} = x$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y} f(y) = x - x = 0$$

3- الآن نكامل $\frac{\partial}{\partial y} f(y)$ ∴ بالنسبة إلى y لنحصل على f(y)

$$\int \frac{\partial}{\partial y} f(y) = 0$$

$$\therefore f(y) = 0$$

وبذلك يكون الحل العام هو :

$$F(x,y) = G(x,y) + f(y) + c$$

$$= xy + (0) + c$$

$$\therefore xy = c$$

(وهو الحل العام)

مثـال (2):

جد الحل العام للدالة التفاضلية الآتية :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 24x}{x^2 + 16}$$

الجـواب:

نعيد صياغة المعادلة

$$(2xy + 24x)dx + (x^2 + 16)dy = 0$$

والآن نختبر فيما إذا كانت المعادلة تفاضلية تامة أم لا:

نعيد كتابة المعادلة بالرموز كما في الصيغة (3-14) وكما يأتي:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ولكي تكون هذه المعادلة تامة يجب أن يتوفر فيها الشرط الآتي المبين في العلاقة (3-16)

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

والآن دعنا نجرب :

$$M(x,y)=2xy+24x$$

$$\therefore\frac{\partial M}{\partial y}=2x$$

و $$N(x,y)=x^2+16$$

$$\therefore\frac{\partial N}{\partial x}=2x$$

إذن توفر الشرط التمام.

والآن نشرع بالحل :

1- تكامل M(x,y) بالنسبة إلى x ونضع الثابت مساوياً لـ f(y) وكما يأتي :

$\frac{\partial F}{\partial x}=2xy+24x$ وبعد إجراء تكاملها ينتج :

$$F(x,y)=x^2y+12x^2+f(y)$$

ويظهر من النتيجة بأن $G(x,y)=x^2y+12x^2$ المذكورة في الخطوة الأولى والآن نجد مشتقتها الجزئية بالنسبة إلى y فينتج:

$$\therefore\frac{\partial G}{\partial y}=x^2 \qquad (3-20)$$

2- والآن نفاضل المعادلة المستخرجة بالنسبة إلى y:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2+\frac{\partial}{\partial y}f(y)$$

ثم نقارن مع N(x,y) في أصل المعادلة التفاضلية والتي تساوي (x^2+16) كي نحصل على قيمة $\frac{\partial}{\partial y}f(y)$ وذلك :

$$\frac{\partial}{\partial y}f(y)=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial y}$$

لدينا:

$$\frac{\partial N}{\partial y}=x^2+16$$

كما لدينا

$$\frac{\partial G}{\partial y}=x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(y)=x^2+16-x^2$$

$$=16$$

3- تكامل $\frac{\partial}{\partial y}f(y)$ بالنسبة إلى (y) لنحصل على f(y)

$$\int\frac{\partial}{\partial y}f(y)=16$$

$$\therefore f(y)=16y$$

4- إذن الحل العام هو:

$$F(x,y)=G(x,y)+f(y)+c$$

$$x^2y+12x+16y=c$$

ويمكن إيجاد الحل الخاص للمعادلة إذا كان y=3 عندما x = 5 وذلك :

$$(5)^2+3+12(5)^2 16(3)=c$$

الجزء الثالث

$$75+300+48=c$$

$$\therefore c=423$$

ولهذا فإن الحل الخاص :

$$x^2+12x^2+16y-423$$

مثال(3) :

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$x(6xy+5)dx+(2x^3+3y)dy=0$$

الجواب

نعيد كتابة المعادلة :

$$(6x^2y+5x)dx+(2x^3+3y)dy=0$$

والآن نختبر تمامية المعادلة :

راجع المثال (1,2) للوقوف على تفاصيل الاختبار

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6x^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\partial x^2$$

إذن المعادلة تفاضلية تامة ولهذا نشرع بالحل :

1- نكامل M(x,y) بالنسبة إلى x ونضع الثابت مساوياً f(y) :

لدينا :

$$\frac{\partial F}{\partial x}=6x^2y+5x$$

$$\therefore F(x,y)=2x^3y+\frac{5}{2}x^2+f(y)$$

ويظهر من النتيجة أن:

$$G(x,y)=2x^3y+\frac{5}{2}x^2$$

$$\therefore \frac{\partial G}{\partial y}=2x^3$$

2- والآن نفاضل المعادلة المستخرجة بالنسبة إلى y :

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2x^3+\frac{\partial}{\partial y}f(y)$$

وحيث ان

$$\frac{\partial}{\partial y}f(y)=\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial G}{\partial y}$$

وإن $\frac{\partial N}{\partial y}=2x^3+3y$ و أن $\frac{\partial G}{\partial y}=2x^3$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial y}f(y)=2x^3+3y-2x^3$$

$$=3y$$

3- نكامل $\frac{\partial}{\partial y}f(y)$ بالنسبة إلى y ولنحصل على f(y) :

$$\int 3y\,dy=\frac{3}{2}y^2$$

$$\therefore f(y)=\frac{3}{2}y^2$$

4- إذن الحل العام هو:

$$F(x,y)=G(x,y)+f(y)+c$$

$$=2x^3y+\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2+c$$

الجزء الثالث

$$\therefore 2x^3y+\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2=c$$

$$4x^3y+5x^2+3y^2=c$$

(وهو الحل العام)

3-4-4 المعادلات التفاضلية الخطية Linear Differential Equations

عندما تكون لدينا معادله تفاضلية ليست تامة فيمكن عند الحاجة تحويلها إلى معادلة تامة وذلك عن طريق ضربها بعامل . أن مثل هذا العامل يسمى العامل التكاملي **Integrating Factor** لكونه يجعل المعادلة قابلة للتكامل.

أما عملية تحديد العامل التكاملي المناسب لمعادلة تفاضلية معينة فهي عملية ليست بالسهلة ولكن يمكن إتباع الطريقة الآتية للحصول على العامل التكاملي المناسب لأية معادلة تكاملية خطية:

إن أية معادلة خطية في $y, \frac{dy}{dx}$ يمكن كتابتها بالصيغة الآتية :

الفصل الثالث

$$\frac{dy}{dx}+yp(x)=Q(x) \qquad (3-21)$$

فإذا ضربت هذه المعادلة بعامل تكاملي هو $e^{\int p(x)dx}$ فالمعادلة المستخرجة تكون :

$$e^{\int p(x)dx}dy+yp(x)e^{\int p(x)dx}dx=Q(x)^{\int p(x)dx}dx \qquad (3-22)$$

والمعادلة أعلاه هي معادلة إذا جرى تكاملها ينتج :

$$ye^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c \qquad (33-23)$$

ولهذا فإن المعادلة : $\frac{dy}{dx}+yp(x)=Q(x)$

يكون حلها :

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c\right] \qquad (8-24)$$

وبنفس الطريقة فإن المعادلة :

$$\frac{dx}{dy} + xp(y) = Q(y) \qquad (8-25)$$

يكون $e^{\int p(y)dy}$ عاملها التكاملي تفاضلي ويكون حلها كما يأتي :

$$xe^{\int p(y)dy} = \int e^{\int p(y)dy} Q(x)dx + c$$

أو

$$x = e^{-\int p(y)dy}\left[\int e^{\int p(y)dy} Q(y)dy + c\right] \qquad (3-26)$$

مثـال (1):

حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$2ydx = (y^4 + x)dy$$

الجـواب:

نعيد صياغة المعادلة كي تأخذ الصيغة (3-25) أي الصيغة :

$$\frac{dx}{dy} = xp(y) = Q(y)$$

$$\therefore 2ydx = (y^4 + x)dy$$

$$2ydx = y^4dy + xdy$$

$$2ydx - xdy = y^4dy$$

وبالقسمة على 2y نحصل على :

$$dx - \frac{x}{2y}dy = \frac{y^3}{2}dy$$

وبالقسمة على dy ينتج:

$$\frac{dx}{\partial y}-\frac{x}{2y}=\frac{y^3}{2} \qquad (3-27)$$

لاحظ بأن $p(y)=-\frac{1}{2y}$

و $Q(y)=\frac{1}{2}y^3$

ولهذا فإن العامل التكاملي المناسب هو :

$$e^{\int p(y)dy}$$

$$=e^{\int -\frac{1}{2y}dy}$$

$$=e^{-\frac{1}{2}\ln y}$$

$$=y^{-\frac{1}{2}}$$

وبذلك يكون لدينا :

$$xe^{\int p(y)dy}=\int e^{\int p(y)dy}Q(y)dy+c$$

وبالتعويض بقيمة $e^{\int p(y)dy}$ التي حصلنا عليها بالمعادلة أعلاه نحصل على:

$$xy^{-\frac{1}{2}}=\int y^{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}y^3)dy$$

$$xy^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\int y^{\frac{5}{2}}dy$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2}{7})y^{\frac{7}{2}}+c$$

$$=\frac{1}{7}y^{\frac{7}{2}}+c$$

$$\therefore x=\frac{\frac{1}{7}y^{\frac{7}{2}}+c}{y^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=(\frac{1}{7}y^{\frac{7}{2}}+c)y^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{7}y^{4}+cy^{\frac{1}{2}}$$

وبالضرب في (7) ينتج :

$$7x=y^{4}+cy^{\frac{1}{2}}$$

(وهو الحل العام)

<u>مثـال (2):</u>

استخرج الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$ydx+2(x-2y^{2})dy=0$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y=-1\ ,\ x=2$

<u>الجـواب :</u>

نعيد صياغة المعادلة كي تأخذ شكل الصيغة (3-25) وكما يأتي:

$$ydx+2xdy-4y^{2}dy=0$$

بالقسمة على ydy و إعادة الترتيب ينتج :

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2x}{y}=4y \qquad (3-28)$$

ويلاحظ أن: $p(y)=\frac{2}{y}$

و $Q(y)=4y$

وبذلك نصل إلى تحديد العامل التكاملي المناسب وهو :

$$e^{\int p(y)dy}=e^{\int \frac{2}{y}dy}$$
$$=e^{2\ln y}$$
$$=y^2$$

وبذلك يكون لدينا :

$$xe^{\int p(y)dy}=\int e^{\int p(y)dy}Q(y)dy+c$$

وبالتعويض ينتج :

$$xy^2=4\int y^2(4y)dy$$
$$=4\int y^3dy$$
$$xy^2=y^4+c$$
$$xy^2-y^4=c$$
$$y^2(x-y^2)=c$$

(وهو الحل العام)

أما الحل الخاص :

مادامت $y=-1$ عندما $x=2$

فإن : $(-1)^2\left[2-(-1)^2\right]=c$

$$c=1$$

إذن $y^2(x-y^2)=1$ (هو الحل الخاص)

3-4-5 المعادلات التفاضلية الخطية في دالة y أو الخطية في دالة x

Differential Equation Linear In Function Of (Y) Or Function Of (X)

تكون الدالة التفاضلية خطية في المتغير (y) إذا كان بالإمكان كتابتها بالصيغة الآتية:

$$\frac{d}{dy}f(y)+f(y)p(x)=Q(y) \qquad (3-28)$$

وهي معادلة من الدرجة الأولى في $\frac{d}{dy}f(y)$ و $f(y)$ وان حلها يكون وفق ما يأتي :

$$f(y)e^{\int p(x)dx}=\left[\int e^{p(x)dx}Q(x)dx+c\right] \qquad (3-29)$$

وبالمثل فإن المعادلة التي يمكن كتابتها بالصيغة الآتية :

$$\frac{d}{dx}f(x)+f(x)p(y)=Q(y) \qquad (3-30)$$

هي دالة خطية تفاضلية في المتغير f(x) وأنها معادلة من الدرجة الأولى في $f(x), \frac{d}{dx}f(x)$ وأن

حلها يكون وفق ما يأتي :

$$f(x)e^{\int p(y)dy}=\left[\int e^{p(y)dy}Q(y)dy+c\right] \qquad (3-31)$$

لنأخذ بعض الأمثلة :

مثال:

جد الحل العام للمعادلة الآتية :

$$x(1-xy^4)dy+ydx=0$$

الجواب:

نعيد صياغة المعادلة لا مكان مطابقتها مع الصيغة (3-28) أو (3-30) ودعنا نختار الصيغة الأخيرة :

بقسمة المعادلة على y و إعادة الترتيب ينتج :

$$dx + \frac{x}{y}dy = x^2 y^3 dy$$

وبذلك تظهر المعادلة بالصيغة (3-30) وإنها خطية في كل من f(x) و $\frac{\partial}{\partial x} f(x)$.

والآن نضرب المعادلة بـ x^{-2} نحصل على :

$$x^{-2}dx + \frac{x^{-1}}{y}dy = y^3 dy$$

ثم نضرب في (-2) لينتج :

$$-2x^{-2} - \frac{2x^{-1}}{y}dy = -2y^3 dy$$

ومن ذلك نحصل على العامل التكاملي :

$$e^{\int -\frac{2}{y}dy}$$

$$= e^{\int -2\ln y}$$

$$= y^{-2}$$

ويلاحظ أن :

$f(x) = x^{-1}, p(y) = -\frac{2}{y}, Q(y) = -2y^3$ راجع (3-30)

والآن نعوض في الصيغة(3-31) فينتج:

$$\therefore x^{-1}y^{-2} = \int y^{-2}(-2y^3)dy$$

$$x^{-1}y^{-2} = -2\int y dy$$

$$x^{-1}y^{-2} + y^2 = c$$

$$\therefore y = \sqrt{c - x^{-1}y^{-2}}$$

أو نجري بعض التكييف فنحصل على :

$$y^2(x^{-1}y^{-4}+1)=c$$

$$x^{-1}y^{-4}+1=\frac{c}{y^2}$$

بالضرب في xy^4 ينتج :

$$1+xy^4=xy^2c$$

(وهو الحل العام).

تمارين (3-1)

1- جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية:

أ- $y\frac{dy}{dx}2x=3y$

ب- $\frac{dy}{dx}-xy-\frac{x}{y}=0$

ج- $\frac{dy}{dx}-x^2+y=0$

د- $xydy=(x^2-y^2)dx$

هـ- $\frac{dy}{dx}=(\frac{1}{y}-y)x$

و- $(2y-xy-3)dx+xdy=0$

ز- $\frac{dx}{dy}=x+e^y$

الجزء الثالث

2- جد الحل الخاص للمعادلات التفاضلية في ظل الشروط المبينة إزاء كل منها:

أ- $(1-x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x(1-x^2)y^{\frac{1}{2}}$ ، y = 2 عندما x = 0

ب- $(x^2-1)\frac{dy}{dx}+(x^2-1)^2+4y=0$ ، y=-4 عندما x = 0

ج- $2ydx=(x^2y^4+x)dy$ ، y=3 عندما x = 1

الفصل الرابع

المعادلات التفاضلية

وبعض التطبيقات الاقتصادية



المعادلات التفاضلية

وبعض التطبيقات الاقتصادية

1-4 مقدمة

ذكرنا بأن التفاضلية هي معادلة تحتوي على مشتقات أو تفاضلات وان أكثر ما تستخدم فيه صيغ المعادلات التفاضلية هو النماذج الرياضية التي تعتبر ذات أهمية عالية في عرض العلاقات بين العناصر الرئيسية المكونة لها وأفضل النماذج هو الذي يحتوي على المؤشرات الأساسية للعلاقات القائمة وأضعفها الذي يحتوي على بعض من هذه المؤشرات. ومن تلك النماذج الرياضية النماذج الاقتصادية التي أصبحت ذات قيمة كبير في التحليلات الاقتصادية الكمية وحيث أن مثل هذه النماذج يقوم على المعادلات التفاضلية فإن الأمر يتطلب إيجاد الحل العام أو الحل الخاص لها لغرض الوصول إلى حل النموذج.

والنماذج الاقتصادية تقسم إلى قسمين: النماذج الساكنة (Static Models) والنماذج المتحركة (Dynamic Models) وتعتني النماذج الساكنة بحالات التوازن أي الحالات التي نحافظ عليها عند بلوغها. أما النماذج المتحركة فيدخل فيها عنصر الزمن سواء بشكل صريح أو ضمني. حيث يظهر بصيغة متغير في حالته الصريحة أو بصيغة متغيرات تباطؤية (Lagged Variables).

الفصل الرابع

وتكثر تطبيقات المعادلات التفاضلية في بناء النماذج الاقتصادية المتحركة ولكننا في هذا الفصل نستعرض المبسط منها لان البعض منها يبلغ من التعقيد مما يتطلب المزيد من الدراية بالرياضيات المتقدمة.

وقبل تناول بعض النماذج المذكورة أعلاه نود الإشارة إلى نوعين من المتغيرات التي تدخل في هذه النماذج هما:

المتغيرات الداخلية (Endogenous Variables) والمتغيرات الخارجية(Exogenous Variables)، إن المتغيرات الداخلية هي المتغيرات التي تتحدد قيمتها داخل النموذج بعد إجراء حله وبهذا فان هذه القيم تخضع للتنبؤ أو تحتاج إلى معلومات لغرض إيضاحها. أما المتغيرات الخارجية فتعرف قيمتها مسبقا ويمكن اعتبارها كثوابت في النموذج.

أو بكلمة أخرى تعتبر المتغيرات الداخلية تنبؤية نحصل عليها من النموذج أما المتغيرات الخارجية فإنها تتحدد من خارج النموذج.

ويتكون النموذج عادة من معادلات عدة تكون البناء الأساسي للنموذج وتدعى بالمعادلات الهيكلية وفيها يتم إيضاح العلاقات التي تربط المتغيرات الداخلية بالمتغيرات الخارجية.وفيها يتم إيضاح العلاقات التي تربط المتغيرات الداخلية بالمتغيرات الخارجية.

أما حل المعادلات (النموذج) إذا كان لها حلا فيتطلب إجراء عمليات صياغة وتكييف لمعادلات النموذج بحيث تصبح المتغيرات الداخلية في جهة والمتغيرات الخارجية من جهة أخرى أي تصبح المتغيرات الداخلية دؤل للمتغيرات الخارجية ولبعض المعالم (Parameters) وتدعى المعادلات حينذاك بالمعادلات ذات الصيغة المختصرة: (Reduced From Equations) ويمكن أن نصل إلى حل النموذج حين نستطيع الحصول على معادلة مختصرة لكل متغير داخلي في النموذج.

وعندما لا يتحقق ذلك فان النموذج يتعذر حله أو يحتاج إلى المعالجات إضافية لتذليل عمليات حله. ودعنا نأخذ مثلا عن كيفية اختصار النموذج.

فعندما تكون لدينا صيغة النموذج الآتي:

$$C = a_1 + a_2 y + a_3 M$$

$$I = b_1 + b_2 y$$

$$M = e_1 + e_2 E$$

$$y = d_1 + d_2 P$$

والنموذج يحتوي على معادلات تشير متغيراتها إلى بعض من الحسابات الإجمالية للدخل الوطني حيث تشير C , Y , M , I , E , P إلى الاستهلاك والدخل والواردات والاستثمار والصادرات ومن ثم موارد استخراج النفط، أما a , b , e , d فهي ثوابت أو معالم. ولأجل حل النموذج ينبغي وضع معادلاته بالصيغة المختصرة فلو افترضنا بأن (C , I) هما المتغيران الداخليان وبقية المتغيرات خارجية فان النموذج يمكن اختصاره بما يأتي:

$$C = a_1 + a_2(d_1 + d_2 p) + a_3(e_1 + e_2 E)$$

$$I = b_1 + b_2(d_1 + d_2 p)$$

وبإعادة الصياغة ووضع معالم جديدة مساوية لحاصل ضرب المعالم الموجودة في المعادلتين أعلاه تصبح صيغة النموذج المختصرة الآتي:

$$C = a_1 + a_4 + a_5 P + a_6 + a_7 E$$

$$I = b_1 + b_3 + b_4 P$$

على افتراض أن:

$$a_4 = a_2(d_1), a_5 = a_2(d_2)$$

و

$$a_6 = a_3(e_1), a_7 = a_3(e_2)$$

ومن ثم:

$$C = a_8 + a_5 p + a_7 E$$

$$I = b_5 + b_4 P$$

حيث أن:

$$a_8 = a_1 + a_4 + a_6$$

$$b_5 = b_1 + b_3$$

وبذلك أظهرت الصيغة المختصرة للنموذج المتغيرات الداخلية دالة المتغيرات الخارجية أي أن:

$$C = f(P, E)$$

$$I = f(P)$$

ويمكن حل النموذج بمجرد وضع قيم لكل من (P,E) التي يفترض إنها معلومة باعتبارها متغيرات خارجية.

والآن بعد أن توضحت الصيغة المبسطة للنموذج الاقتصادي سنحاول استعراض بعض النماذج الأكثر شيوعاً والتي تستند في بناءها على المعادلات التفاضلية:

2-4 نموذج النمو المبسط لدومار(*) Domar Growth Model

يقدم دومار نموذجه في النمو الاقتصادي بصيغة المعادلات التفاضلية كالآتي:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\alpha}{\beta} y = 0 \qquad (4\text{-}1)$$

حيث أن y يمثل الدخل و(t) الزمن أما α, β فهي معالم ثابتة.

<u>ولحل النموذج نتبع الخطوات الآتية:</u>

نجعل $\frac{\alpha}{\beta} = L$ للاختصار ونعيد صياغة النموذج في (4-1) ليصبح على غرار الصيغة (3-8) أي صيغة المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة أو:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

(*) (Evsey David Domar) ايفسي ديفيد دومار: اقتصادي ولد سنة 1914 وكانت تحليلاته لعمليات النمو الاقتصادي من الأعمال المبكرة لجعل التحليلات الكينزية ذات طابع متحرك وذلك بأخذ التغيرات التي تطرأ على المتغيرات الاقتصادية الكلية عبر الزمن بنظر الاعتبار.

وذلك كالآتي:

$$\frac{dy}{dt} = Ly$$

$$\therefore \frac{dy}{y} Ldt \qquad (4\text{-}2)$$

وعند مراجعة الفقرة (1/4-8) نستطيع أن نجد الحل العام للمعادلة (4-2)وذلك:

نكامل طرفي المعادلة فنحصل على:

$$\ln y = \frac{L^2}{2} + \ln C$$

lnc : هو ثابت عشوائي واختير هنا بصيغة مناسبة حيث أن الأصل أن يكتب C:

$$\ln \frac{y}{c} = \frac{L^2}{2}$$

$$\frac{y}{c} = e^{L^2/2}$$

$$\therefore y = Ce^{L^2/2}$$

$$y = Ce^{Lt} \qquad (4\text{-}3)$$

أما الطريقة الثانية التي يمكن بموجبها حل النموذج فهي اختيار معامل تكاملي مناسب بعد وضع المعادلة بالصيغة الآتية:

$$\frac{dy}{dt} - Ly = 0$$

وهنا تظهر P(X) المبينة في العلاقة (8-19) تساوي (L-) وبذلك يمكن تحديد المعامل التكاملي المناسب ألا وهو:

$$I_t = ay_{t-1}$$

$$\therefore ye^{-\int Ldt} = \int e^{-\int Ldt}(0) + C$$

$$ye^{-Lt} = C$$

$$\therefore y = Ce^{Lt} \qquad (4\text{-}4)$$

وهو الحل العام للنموذج أيضاً.

3-4 نموذج دومار في الاقتصاد الكلي Domar Macroeconomic Model

يتكون نموذج دومار في الاقتصاد الكلي من معادلات التي تحتوي على المتغيرات الكلية في الاقتصاد الوطني كالدخل والاستثمار والادخار أما صيغة النموذج فهي:

$$S(t) = \alpha y(t)$$

$$I(t) = \beta \frac{dy}{dt}$$

$$S(t) = I(t)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

حيث أن (S) يمثل الادخار و (Y) الدخل و (I) الاستثمار وهي جميعا متغيرات داخلية ودوال للزمن (t) وتشير المعادلة الأولى إلى أن الادخار هو نسبة معينة من الدخل أما المعادلة الثانية فتنص على أن الاستثمار هو نسبة من معدل تغير الدخل عبر الزمن فيما تنص المعادلة الثالثة على تساوي كل من الادخار والاستثمار.

وتعكس المعادلات الثلاث العلاقات العامة بين المتغيرات فيها ويمكن استخراج معادلة جديدة منها تلخص التغيرات عبر الزمن في المتغيرات المذكورة وذلك كما يلي:

$$\frac{dy}{dt}=\frac{I(t)}{\beta}$$

ولما كانت:

$$I(t)=S(t)=\alpha y(t)$$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=\frac{\alpha}{\beta}y(t)$$

$$\frac{dy}{dt}-\frac{\alpha}{\beta}y(t)=0$$

ويمكن إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية أعلاه بطريقة اختيار معامل تكاملي مناسب. وهنا تظهر في المعادلة ($p(x)$) المبينة في العلاقة (8-19):

$$p(x)=-\frac{\alpha}{\beta}$$

ومن ذلك يمكن تحديد المعامل التكاملي المناسب هو:

$$e^{-\int(\alpha/\beta)dt}$$

أما الحل العام للنموذج فهو:

$$ye^{-\int(\alpha/\beta)dt}=\int e^{-\int(\alpha/\beta)dt}(0)+C$$

$$ye^{-(\alpha/\beta)t}=C$$

$$\therefore y=Ce^{(\alpha/\beta)t} \qquad (4\text{-}5)$$

(وهو الحل العام)

وتظهر معادلة الحل بان الدخل هو دالة للوقت مادامت α , β Ce, ثوابت. أما قيم كل من S,I فيمكن استخراجها بالطريقة التالية:

$$I=S=\alpha y=\alpha Ce^{(\alpha/\beta)t}$$

أما الحل الخاص للنموذج فهو:

إذا كانت $y = y_0$ وهو مستوى الدخل عند بداية الفترة عندما تكون $t = 0$ إذن:

$$y_0 = ce^{(\alpha/\beta)(o)} = C$$

وبذلك يكون الحل الخاص:

$$y = y_0 e^{(\alpha/\beta)t} \quad (4-6)$$

ومن الحل الخاص يمكن إيجاد قيم كل (S,I) حيث أن:

$$I = S = \alpha y = \alpha y_0 e^{(\alpha/\beta)t}$$

دعنا الآن نعطي لمعالم النموذج قيما افتراضية ونرى كيف يعمل النموذج:

$$S(t) = 0.18y(t)$$

$$I(t) = 0.9\frac{dy}{dt}$$

$$S(t) = I(t)$$

وعندما تكون t في بداية الفترة فان $y_0 = C$ ولنفترض أن الدخل في بداية الفترة يساوي (150)

فما هو مستوى الدخل بعد (4) سنوات. الآن نستخدم الحل الخاص من العلاقة (4-5) لنحصل على:

$$y = 150e^{(0.18/0.9)(4)}$$

$$= 150e^{0.8}$$

$$= 150(2.225)$$

$$\therefore y \approx 334$$

ويظهر من نتائج حل النموذج أن الدخل البالغ في بداية الفترة (150) قد أصبح (334) في نهاية الفترة التي افترض أنها (4) سنوات ويبدو أن الدخل نما بمعدل عالي هو 22% سنويا تقريبا وهذا يعتمد على المعالم المقدرة للنموذج وهي (α , β).

4-4 نموذج دومار في الدين الوطني
Domar National Dept Model

استخدم دومار مجموعة من المعادلات التفاضلية كتلك التي استخدمها في النموذج الكلي أعلاه حيث حاول في النموذج أدناه توضيح العلاقات بين الدخل الوطني والدين الوطني بصيغة النموذج الآتي:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha y(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta$$

$$y(0) = y_0$$

$$D(0) = D_0$$

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

الفصل الرابع

حيث أن D تمثل الدين الوطني و y الدخل الوطني ويظهر في المعادلتين الأولى والثانية واضحا أن كل من(D,Y) هما متغيران داخليان ويتزايد في النموذج الدخل الوطني بمعدل ثابت هو β عبر الزمن t) (وان معدل زيادة الدين الوطني هو نسبة ثابتة α من الدخل الوطني. أما المعادلتين الثالثة والرابعة فتعطي شروطاً ابتدائية للنموذج والتي تشير إلى أن الدخل الوطني في بداية الفترة يساوي مقداراً معيناً هو y_0 كما أن الدين الوطني في بداية الفترة يساوي أيضاً D_0 كما أن هناك شرطاً إضافياً ينص على أن كل من α , β ثوابت قيمتها اكبر من الصفر.

والآن إذا كاملنا المعادلة الثانية نحصل على:

$$y = \beta t + C$$

(C = أي ثابت عشوائي)

وحيث أن $y = y_0$ عندما t = 0 (إذن: $C = y_0$)

$$\therefore\ y = \beta t + y_0$$

وبالتعويض في المعادلة الأولى من النموذج نحصل على:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha\beta t + \alpha y_0$$

والآن نكامل:

$$D = \frac{1}{2}\alpha\beta t^2 + \alpha y_0 t + C$$

ومادام $D = D_0$ عندما t = 0 إذن نكون D_0 في المعادلة أعلاه $D_0 = C$

وإن: $$D = \frac{1}{2}\alpha\beta t^2 + \alpha y_0 t + D_0$$

وبذلك يكون حل النموذج كما يلي:

وإن: $$D(t) = \frac{1}{2}\alpha\beta t^2 + \alpha y_0 t + D_0$$

و $$y(t) = \beta t + y_0 \quad (4\text{-}7)$$

وتعتبر نسبة الدين الوطني إلى الداخل الوطني ذات أهمية في نموذج دومار أعلاه وذلك حسبما مبين أدناه:

$$\frac{D(t)}{y(t)} = \frac{\frac{1}{2}\alpha\beta t^2 + \alpha y_0 t + D_0}{\beta t + y_0}$$

أو بصيغة أخرى:

$$\frac{D(t)}{y(t)} = \frac{D_0}{\beta t + y_0} + \frac{\alpha y_0 t}{\beta t + y_0} + \frac{\frac{1}{2}\alpha\beta t^2}{\beta t + y_0} \quad (4\text{-}8)$$

$$\frac{D_1}{\beta t + y_0} \to 0$$

$$\frac{\alpha y_0 t}{\beta t + y_0} \to \frac{\alpha y_0}{\beta}$$

$$\frac{\frac{1}{2}\alpha\beta t^2}{\beta t + y_0} \to \infty$$

ولهذا فإنه عندما $t \to \infty$ فان: $\frac{D(t)}{y(t)} \to \infty$

وفي هذا النموذج يلاحظ أن نسبة الدين الوطني إلى الدخل الوطني تتزايد بلا قيود عبر الزمن.

5-4 نموذج السعر المعدل Price Adjustment Model

يعتبر فالراس من الذين تناولوا توازن السوق مشيرا إلى التعديلات التي تجريها قوى السوق لإعادة التوازن في حالة اختلاله، كما تناول الموضوع مارشال وايفانس وغيرهم. وقد صيغت فرضيات السعر المعدل وفق نموذج يتحدث عن سوق للسلع يتمثل فيه العرض والطلب بمعادلتين خطيتين كما في النموذج الخطي البسيط ويمكن حلهما للوصول إلى سعر التوازن بالطريقة الاعتيادية. ولكن بالإضافة إلى ذلك هناك معادلة تبين أن معدل تغير السعر عبر الزمن هو نسبة من الزيادة في الطلب أي زيادة الطلب على العرض (D-S) فإذا كانت الزيادة في الطلب موجبة أي (D-S>0) فان ذلك يؤدي إلى ارتفاع السعر في حين تؤدي الزيادة السالبة في الطلب إلى خفض السعر. أما صيغة النموذج فهي:

$$d(t) = \alpha_0 + \alpha_1 p(t)$$

$$s(t) = \beta_0 + \beta_1 p(t)$$

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(d - s)$$

$$\alpha_1 > 0, \beta_1 > 0, \gamma > 0$$

حيث أن P تمثل السعر و S تمثل العرض و D تمثل الطلب و t الزمن أما α, β, γ فهي معالم ثابتة. وهكذا يظهر واضحا من المعادلة الثالثة في النموذج أن الطلب لا يساوي العرض.

ولأجل حل النموذج تتبع الخطوات الآتية:

نعوض المعادلتين الأولى والثانية بالمعادلة الثالثة لينتج:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma\left[(\alpha_0 + \alpha_1 p) - (\beta_0 + \beta_1 p)\right]$$

$$= \gamma\left[\alpha_0 - \beta_0 + (\alpha_1 - \beta_1)p\right] \qquad (4\text{-}9)$$

وحيث أن سعر التوازن يتحقق عندما D(t)=S(t) أي أن:

$$\alpha_0 + \alpha_1 p = \beta_0 + \beta_1 p$$

$$\alpha_1 - \beta_0 = p(\beta_1 - \alpha_1)$$

$$\therefore p_e = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1} \qquad (4\text{-}10)$$

وهو سعر التوازن وقد رمزنا له بالرمز (p_e)

ومن المعادلة (4-10) نحصل على:

$$(\alpha_0 - \beta_0) = p_e(\beta_1 - \alpha_1)$$

أو

$$= -p_e(\alpha_1 - \beta_1)$$

وبالتعويض في المعادلة (4-9) ينتج:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma\left[- p_e(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_1 - \beta_1)p\right]$$

$$= \gamma(\alpha_1 - \beta_1)(p - p_e)$$

واختصاراً بالرموز لتكن:

$$\lambda = \gamma(\alpha_1 - \beta_1)$$

فيكون لدينا:

$$\frac{dp}{dt} = \lambda(p - p_e)$$

$$\therefore \frac{1}{p - p_e} . \frac{dp}{dt} = \lambda$$

والآن نكامل على:

$$\ln(p - p_e) = \lambda t + C$$

$$p - p_e = Ce^{\lambda t}$$

$$\therefore p = p_e + Ce^{\lambda t} \qquad (4\text{-}11)$$

وبما كان السعر $p = p_0$ في بداية الفترة أي عندما t = 0 في بداية الفترة الزمنية وعندها تكون $C = y_0 - y_e$ وبذلك تكون المعادلة (4-11) كما يأتي:

$$p = p_e + (p_0 - p_e)e^{\lambda t} \qquad (4\text{-}12)$$

(وهو الحل العام للنموذج)

وحيث أن وكما ذكرنا أعلاه فان:

$$p_e = \frac{\alpha_0 - \beta_0}{\beta_1 - \alpha_1}$$

كما أن:

$$\lambda = \gamma(\alpha_1 - \beta_1)$$

ومادام $\lambda < 0 , p \to p_e$ عندما $t \to \infty$

مثال:

إذا كان الطلب والعرض (لكل وحدة من الزمن) على إنتاج معين حسب الدالتين الآتيتين على التوالي:

$$d = ap + b \quad (1)$$

$$s = cp + m \quad (2)$$

حيث آن d , s هما الطلب والعرض على التوالي وP السعر و a,b,c,m معالم ثابتة. وإذا كان السعر يتغير عبر الزمن بنسبة متناقصة مع الزيادة في الطلب على العرض. بين بان:

(أ) $$\frac{dp}{dt} + \lambda(p - p_e) = 0$$

(ب) $$p = p_e + (p_0 - p_e)e^{-\lambda t}$$

الجواب

(أ) نصيغ دالة السعر كمتغير عبر الزمن كنسبة من الزيادة في الطلب:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma(d - s) \quad (3)$$

والآن نعوض المعادلة الأولى والثانية في المعادلة (3) فينتج:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma\left[ap + b - cp - m\right]$$

$$= -\gamma\left[(b - m) + (a - c)p\right] \quad (4)$$

وحيث أن سعر التوازن يتحقق عندما s = d أي أن:

$$ap + b = cp + m$$

$$b - m = p(c - a)$$

$$\therefore p_e = \frac{b - m}{c - a}$$

أو

$$b - m = p_e(c - a)$$

$$= -p_e(a - c)$$

وبتعويض ذلك في المعادلة (4) ينتج:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma\left[-p_e(a - c) + (a - c)p\right]$$

وبإعادة الترتيب:

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma\left[p - p_e(a - c)\right]$$

والآن لتكن:

$$\lambda = \gamma(a - c)$$

$$\therefore \frac{dp}{dt} = -\lambda(p - p_e)$$

أو

$$\frac{dp}{dt} + \lambda(p - p_e) = 0 \quad (5)$$

(ب) نأخذ المعادلة (5) ونعيد صياغتها:

$$\frac{1}{p - p_e}\frac{dp}{dt} = -\lambda \quad (6)$$

وتكامل المعادلة (6) ينتج:

$\ln(p - p_e) = -\lambda t + c \quad (7)$ وبإعادة التكييف ينتج:

$p = p_e + ce^{-\lambda t}$ أو $p - p_e = ce^{-\lambda t} \quad (8)$

وحيث أن $p = p_o$ عندما $(t \rightarrow o)$ في بداية الفترة فان قيمة c في المعادلة (8) تكون:

وبالتعويض في معادله (8) ينتج:

$$p_0 = p_e + ce^{-\lambda(0)}$$

$$= p_e + c$$

$$\therefore c = p_0 - p_e$$

$$p = p_e + (p_0 - p_e)e^{-\lambda t}$$

4-6 نموذج الدخل - الاستهلاك - الاستثمار
Income – Consumption – Investment Model

يتكون هذا النموذج في بعض مكوناته من معادلة تفاضلية أما المعادلات الأخرى فيه فهي خطية حيث يبين النموذج بان الاستهلاك والاستثمار هما دالتان للدخل.

أما الدخل فيتغير بمعدل يمثل نسبة معينة من الزيادة في الطلب ويقصد بالطلب هنا الطلب على الاستهلاك أو الاستثمار أما الزيادة في الطلب فهي الاستهلاك والاستثمار معاً مطروحاً منهما الدخل الذي يمثل جانب العرض. وبذلك يظهر النموذج بالإطار الآتي:

$$Cm(t) = \alpha Y_m(t) \quad (1)$$

$$I_m(t) = \gamma Y_m(t) \quad (2)$$

$$\frac{dY_m}{dt} = \lambda(c_m + I_m - Y_m) \quad (3)$$

$$Y_m(0) = Y_0 - y_e \quad (4)$$

$$\alpha > 0 \ , \gamma > 0, \lambda > 0$$

حيث أن Cm , Im , Ym هي انحرافات كل من الاستهلاك والاستثمار والدخل على التوالي عن قيمتها في مستوى التوازن أي عن: Ce , Ie , Ye أما α, γ, λ فهي معالم ثابتة ولحل النموذج أعلاه نقوم بما يأتي:

نعوض المعادلتين الأولى والثانية بالمعادلة الثالثة لينتج:

$$\frac{dY_m}{dt} = \lambda(\alpha y_m + \gamma Y_m - Y_m) \quad (5)$$

$$= \lambda(\alpha + \gamma - 1)Y_m$$

$$\frac{dY_m}{y_m} = \lambda(\alpha + \gamma - 1)dt \quad (6)$$

والآن نكامل المعادلة التفاضلية (6) ينتج:

$$\ln Y_m = \lambda(\alpha + \gamma - 1)t + C \quad (7)$$

لاحظ بأن C تمثل هنا ثابت عشوائي وليس الاستهلاك.

$$Y_m = Ce^{\lambda(\alpha+\gamma-1)t} \quad (8)$$

ومادام $Y_m = Y_0 - Y_t$ عندما t = 0 حيث أن Y_0 هو الدخل في بداية الفترة.

وعندما t = 0 تكون قيمة C في المعادلة (8) كما يأتي:

$$Y_m = Ce^0$$

$$Y_m = C$$

نذكر مره أخرى بأن C هنا هي ثابت عشوائي وليس الاستهلاك.

وحيث أن $Y_m(0) = Y_0 - Y_e$ من المعادلة (4) فإن:

$$\therefore C = Y_0 - Y_e \quad (9)$$

وبالتعويض عن قيمة C في المعادلة (9) بالمعادلة (8) ينتج:

$$Y_m = (Y_0 - Y_e)e^{\lambda(\alpha+\gamma-1)t} \quad (10)$$

ولما كان مقدار انحراف الدخل بشكل عام Y_m هو الدخل مطروحا منه الدخل عند مستوى التوازن أي أن:

$$Y_m = Y - Y_e$$

$$\therefore Y = Y_e + Y_m \quad \text{أو:} \quad (11)$$

وبالتعويض عن قيمة Y_m الواردة في المعادلة (10) بالمعادلة (11) ينتج:

$$Y = Y_e + (Y_0 - Y_e)e^{\lambda(\alpha+\gamma-1)t}$$

وإذا ما $t \to \infty$ وكانت $\alpha + \lambda < 1$ فإن:

$$Y \to Y_e \quad , e^{\lambda(\alpha+\gamma-1)t} \to 0$$

تمارين (1-4)

1- تشير الدراسات في سوق معينة إلى أن دالتي الطلب والعرض على سلعة ما كانت على التوالي كما يلي:

$$d = a + bp$$

$$s = m + c\,p$$

وكان السعر يتغير عبر الزمن بنسبة متزايدة عن مقدار الزيادة في الطلب أي أن:

$$\frac{dp}{dt} = \gamma(d - s)$$

والمطلوب إيجاد مستوى السعر (P) في هذه السوق عن طريق حل النموذج.

2- وجد أن نموذج الدين الوطني حسب الصيغة الآتية:

$$\frac{dD}{dt} = \alpha y(t) + \gamma$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta$$

$$Y(0) = Y_0$$

$$D(0) = D_0$$

$$\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$$

حل النموذج لإيجاد نسبة الدين الوطني إلى الدخل الوطني.

3- خذ النموذج الآتي:

$$s(t) = \alpha y(t) + \gamma$$

$$I(t) = \beta \frac{dy}{dt}$$

$$s(t) = I(t)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

جد الحل العام والحل الخاص للنموذج.

الفصل الخامس

معادلات الفروق

Difference Equations



معادلات الفروق

Difference Equations

1-5 مقدمة

ذكرنا في مقدمة الفصل الثامن بان المعادلات التي تحتوي على متغيرات تتحرك بشكل منفصل (غير مستمر) تدعى بمعدلات الفروق. في حين تسعى المعادلات التي تعالج العلاقات بين المتغيرات التي تتبدل بشكل متصل (مستمر) بالمعادلات التفاضلية. وتكثر في الإحصاءات الاقتصادية طرق تسجيل البيانات وفق فترات زمنية متباينة فهناك الفترات السنوية كإحصاءات الدخل القومي والأنفاق الاستثمار وغيرها. وهناك الفترات الفصلية كالبيانات المالية وحسابات الشركات وموقفها المالي، وهناك الفترات الشهرية كالإحصاءات ميزانية الأسرة وأجور ورواتب الجهات الحكومية والأهلية وإحصاءات الإنتاج وغير ذلك. ومن الإحصاءات ما يسجل يوميا بالحسابات التي ترحل إلى سجلات الأستاذ واليومية في مختلف الشركات والأعمال. وهكذا يتبين لنا بان الزمن أصبح عنصرا مهما في تسجيل المتغيرات الاقتصادية وأصبحت التبدلات التي تطرأ عليها دالة للزمن وخاصة عند إجراء التحليلات وحسابات التوقعات والتنبؤات وبناء النماذج الاقتصادية.

الفصل الخامس

وعلية فقد اعتمد الزمن كمتغير مستقل تعتمد عليه المتغيرات الاقتصادية عند تبدلها من مستوى إلى مستوى آخر وصار يشار إلى التحليلات التي تعني بهذا الجانب بتحليلات الفترة الزمنية مادام التغير يتم عبر الزمن بصورة متقطعة بغض النظر عن كونه يوم أو فصل أو سنة أو غير ذلك.

كما تشير إلى أن إدخال الزمن كمتغير مستقل في المعادلات أو الدوال الاقتصادية ينقلها من الحالة الساكنة إلى الحالة الحركية فدالة الاستثمار بدلا أن تكتب بحالتها الساكنة: I=ay أي أن مستوى الاستثمار (I) يساوي نسبة معينة من الدخل (y) تصبح في حالتها الحركية $I_t = ay_t$ بعد أن دخل عنصر الزمن (t) أو $I_t = ay_{t-1}$ ويكون الاستثمار هنا دالة للدخل ف السنة السابقة أو ربما في السنة ما قبل السابقة وأية صيغة من صيغ الزمن تأخذها الدالة.

2-5 تعريف معادلات الفروق

حيث أن استمرارية الزمن أو تقطعه هو الذي يحدد نوع المعادلة فيما إذا كانت تفاضلية أو فروق فإن الزمن (t) هو المتغير المستقل الذي يحدد لنا شكل التغيرات في المتغير المعتمد (y) ولكن لأغراض عمومية التحليل سنأخذ المتغير (x) بدلا من(t) كمتغير مستقل يؤثر على (y). وهنا نقول إذا كانت y=f(x) بمفهوم معادلات الفروق فإن قيم y تتحدد بقيم صحيحة لـ (x) أي أن x=0,1,2,3,....n ويرمز لـ y عادة في معادلات الفروق بالرمز y_x وتعني التغير الذي يطرأ على نتيجة للتغير في x من(x) إلى (x+1. ويمكن كتابة هذه العلاقة كالآتي:

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x \qquad (5\text{-}1)$$

وتدعى Δ هنا بالعداد الذي يساعد على حساب التغيرات في y. أما المعادلة من النوع (1-10) فتسمى معادلة فروق من الدرجة الأولى لكونها تحسب لنا الفروق في المتغير y كمرحلة أولى عندما يتغير وعند ذاك نكون أمام معادلة فروق من المرتبة العليا وهكذا التدرج في المراتب كلما ارتقينا في عمليات حساب الفروق بين الفروق من مرتبة إلى الأكثر منها منزلة.

فالفرق الثاني لـ y_x يحسب كالآتي:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y_x &= \Delta(\Delta y_x) \\
&= \Delta y_{x+1} - \Delta y_x \\
&= (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x) \\
&= y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x \qquad (5\text{-}2)
\end{aligned}$$

والفرق الثالث لـ y_x فيستخرج كما يأتي:

$$\begin{aligned}
\Delta^3 y_x &= \Delta(\Delta^2 y_x) \\
&= \Delta y_{x+2} - 2\Delta y_{x+1} + y_x \\
&= (y_{x+3} - y_{x+1}) - 2(y_{x+2} - y_{x+1}) + (y_{x+1} - y_x)
\end{aligned}$$

$$= y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x \qquad (10\text{-}3)$$

ومثل هذا الأساس يمكن حساب الفرق من آية مرتبة بنفس الطريقة فحساب الفرق n لـ y_x يكون كما يلي:

$$\Delta^n y_x = \Delta(\Delta^{n-1} y_x)$$

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{n!}{(n-t)!t!}(-1)^t y_{x+n-t} \qquad (10\text{-}4)$$

يلاحظ أننا تعاملنا مع y كدالة لـ x بدلا من الزمن t وهو موضوع مناقشتنا لمعنى معادلات الفروق لأغراض التبسيط، وسنبقى على ذلك خلال الفقرات القادمة وسنعود لاستخدام الزمن t بدلا من x في الأقسام الأخيرة.

والصيغة رقم (10-4) تضع القاعدة العامة لحساب أي فرق مطلوب، والآن لنأخذ بعض الأمثلة لتوضيح ما سبق ذكره:

مثال (1)

إذا كانت $y = x^2 + 5$

احسب الفرق الثاني لـ y_x

الجواب:

حسب العلاقة (10-2) فإن:

$$\Delta^2 y_x y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$$

وعلية فإن

$$\Delta^2 y_x = [(x+2)^2 + 5] - 2[(x+1)^2 + 5] + [x^2 + 5]$$
$$= (x^2 + 4x + 4 + 5) - 2(x^2 + 2x + 1 + 5) + (x^2 + 5)$$
$$= (x^2 - 2x^2 + x^2)(4x - 4x) + (9 - 12 + 5)$$
$$= 2$$

مثال (2)

جد الفرق الأول للدالة الآتية:

$$y = 3x^2 + 1$$

الجواب:

من العلاقة (5-1) فإن الفرق الأول هو:

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$
$$= [3(x+1)^2 + 1] - [3x^2 + 1]$$
$$= 6x + 3$$
$$= 3(2x = 1)$$

مثال (3)

جد الفرق الثالث للدالة الآتية:

$$y = 2y^2 - 1$$

الجواب:

باستخدام العلاقة (5-3) يمكن حل المسالة كما يلي:

$$\Delta^2 y_x = y_{x+3} - 3y_{x+2} + 3y_{x+1} - y_x$$
$$= [2(x+3)^2 + 1] - 3[2(x+2)^2 - 1] + 3[2(x+1)^2 - 1] - [2x^2 - 1]$$
$$= (2x^2 + 12x + 18 - 1) - (6x^2 + 24x + 2x - 1) + (6x^2 + 12x + 6 - 1) - (2x^2 - 1)$$
$$= (2x^2 - 6x^2 - 2x^2) + (12x - 24x + 12x) + (17 - 23 + 5 + 1)$$
$$= 0$$

10-3 معادلات الفروق الخطية Linear Difference Equations

تكون معادلة الفروق خطية إذا كان المتغير المعتمد من الدرجة الأولى أي غير مرفوع لقوة معينة صريحة أو ناجمة عن حاصل ضرب تبادلي، أما مرتبة المعادلة فكما ذكرنا فهي أعلى فرق موجود في المعادلة .

فالمعادلة :

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 2y_x = 4x$$

هي معادلة فروق خطية أما مرتبتها فهي المرتبة الثانية وعادة ما تكتب معادلات الفروق بإحدى الطريقتين :

أ- إما كدالة ضمنية للمتغير y عند n من القيم المختلفة للمتغير y أي بالصيغة الآتية :

$$(5\text{-}5)\ ...\ f(y_{x+n}, y_{x+n-1}, y_x) = 0$$

ب- أو كدالة للمتغير y وفروقاته n أي بالصيغة الآتية :

$$(5\text{-}6)\ ...\ F(\Delta^n y_x, \Delta^{n-1} y_x, ..., \Delta y_x, y_x) = 0$$

وتعتبر الصيغة (5-5) أكثر استعمالاً وتداولاً ولتوضيح كيفية كتابة معادلات الفروق ومن الصيغة المذكورة نأخذ الأمثلة الآتية .

مثال (1)

خذ معادلة الفروق حسب (5-6)

$$\Delta y_x = 3$$

يمكن أن تكتب حسب الصيغة (5-5)

$$y_{x+1} - y_x = 3$$

(وهي خطية من المرتبة الأولى)

مثال (2)

لدينا معادلة الفروق حسب الصيغة (5-6)

$$\Delta^2 y_x - 2\Delta y_x = x$$

نستطيع كتابتها حسب الصيغة كما يأتي :

$$\Delta(y_{x+1}-y_x)(-2(y_{x+1}-y)=x$$

$$(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_x)-2(y_{x+1}-y_x)=x$$

$$y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x-2y_{x+1}+2y_x=x$$

$$y_{x+2}-4y_{x+1}+3y_x x=0$$

وهي معادلة فروق ومن المرتبة الثانية .

5-4 حلول معادلات الفروق

يعرف حل معادلة الفروق بأنه العلاقة الدالية التي لا تحتوي على فروقات وتتحدد قيمتها بجمع القيم الصحيحة غير السالبة والتي تفي بمتطلبات معادلة الفروق نفسها .

وبمعنى آخر تعتبر y=f(x) حلا لمعادلة فروق إذا كانت أي قيمة لـ y تفي بمتطلبات معادلة الفروق لكل قيم المتغير المستقل x التي تؤخذ لهذا الغرض.

أما الحل العام لمعادلة الفروق فيعرف بكونه الحل الذي يحتوي على n من الثوابت العشوائية .

أما الحل الخاص لمعادلة الفروق فهو الحل الذي يمكن الحصول علية من الحل العام عن طريق إعطاء قيم معينة للثوابت العشوائية المجودة في الحل العام . وهذه القيم تعطي ضمن الشروط الأولية (initial conditions) ويعتمد عدد الثوابت العشوائية في الحل العام على مرتبة معادلة الفروق فالمعادلة من المرتبة n يحتوي حلها العام n من الثوابت العشوائية ولهذا يحتاج إلى n من الشروط الأولية .

لنأخذ بعض الأمثلة الإيضاحية :

مثال (1)

بين بأن $y_x=x+c$ هو حل لمعادلة الفروق التالية :

$$y_{x+1}-y_x=1$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 1$ (ونعني بـ y_0 قيمة y في بداية الفترة أي عندما يكون الزمن t=0) ولكن لنتذكر إننا نستخدم الآن x بدلا من t كما سلفنا ذكره .

الجواب

$$y_{x+1} - y_x = 1$$
$$(x+1+c)-(x+c)=1$$

لذلك فإن

$$y_x = x + c$$

وهو الحل العام

ولدينا :

$$y_0 = 1$$
$$x + c = 1$$

لو كان x=0 في بداية الفترة فإن :

$$1 = 0 + c$$
$$c = 1$$

ولهذا فإن $y_x = x + 1$ وهو الحل الخاص عندما $y_0 = 1$

مثال (2):

بين أن

$$y_x = \frac{(x-1)}{3} + c$$

هو حل معادلة الفروق

$$y_{x+1} - y_x = \frac{2}{3}x$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 4$

<u>الجواب:</u>

لدينا :

$$y_{x+1} - y_x = \frac{2}{3}x$$

$$\therefore (\frac{(x+1-1)(x+1)}{3} + c - (\frac{(x-1)x}{3} + c) = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{x(x+1)}{3} + c - (\frac{(x-1)x}{3} + c) = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{x(x+1-x-1)}{3} = \frac{2}{3}x$$

$$\frac{2x}{3} = \frac{2}{3}x$$

لذلك فإن

$$y_x = \frac{(x-1)x}{3} + c$$

(وهو الحل العام لمعادلة الفروق)

أما الحل الخلص كالآتي :

لدينا :

$$y_0 = 4$$

$$\therefore \quad x = 0$$

في بداية الفترة

وهكذا فإن

$$4 = \frac{(0-1)0}{3} + c$$

$$c = 4$$

وبذلك يكون الحل الخاص :

$$y_x = \frac{(x-1)x}{3} + 4$$

5-5 معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة
Linear First - Order Difference Equations With Constant Coefficients

تكتب معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة كما في الصيغة الآتية :

$$a_0(x)y_{x+1} = a_2(x)y_x = g(x) \quad , \quad a_0(x) \neq 0 \; , \quad a_1(x) \neq 0$$

$$(5-7) \;\ldots\; y_{x+1} = \frac{a_1(x)}{a_0(x)} y_0 + \frac{g(x)}{a_0(x)}$$

وإذا كانت :

$$a_0(x) \; , \quad a_1(x) \; , \quad g(x)$$

ثوابت وليست دوال للمتغير x فإن :

$$(5\text{-}8) \;\ldots\; y_{x+1} = Ay_x + B$$

حيث أن A , B ثوابت و $B \neq 0$, $A \neq 0$ إذا وإذا فقط $g = 0$ في المعادلة الأصلية (7 - 5)

أما حل هذه المعادلة فيتم حسب الخطوات التالية :

$$Y_1 = AY_0 + B$$

$$Y_2 = A(AY_0 + B) + B$$

$$= A^2 Y_0 + AB + B$$

$$Y_3 = A^2 (Ay_0 + B) + AB + B$$

$$= A^3Y_0 + A^2B + AB + B$$

$$Y_4 = A^3(Ay_0 + B) + A^2B + +AB + B$$

$$= A^4Y_0 + A^3B + A^2B + AB + B$$

$$Y_5 = A^4(Ay_0 + B) + A^3B + A^2B + +AB + B$$

$$= A^5Y_0 + A^4B + A^3B + A^2B + AB + B$$

$$= A^5Y_0 + B(A^4 + A^3 + A^2 + A + 1)$$

وهكذا فإن :

$$Y_x = A^xY_0 + B(1 + A + A^2 + A^3 + \dots\dots\dots \; A^{x-1})$$

$$Y_x = A^xY_0 + B\sum_{x=0}^{x-1} A^x$$

ويلاحظ أن $\sum_{x=0}^{x-1} A^x$ ما هي إلا متوالية هندسية ذات مجموع يساوي $\frac{1-A^x}{1-A}$ في حالة $A \neq 1$ ، ويساوي x في حالة $A = 1$.

وبهذا فإن حل معادلة الفروق $y_{x+1} = Ay_x + B$ يأخذ صيغتين هما :

$$(5\text{-}9) \dots y_x = A^x y_0 + B(\frac{1-A^x}{1-A}) \; FOR \; (A \neq 1 \quad , \quad X = 0,1,2,\dots.)$$

$$(5\text{-}10) \dots y_x = y_0 + B \; FOR \; (A = 1 \quad , \quad X = 0,1,2,\dots.)$$

ويلاحظ أن الحل في (5-9) أو (5-10) يفي متطلبات المعادلة (5-8) وهي :

$$y_{x+1} = Ay_x + B$$

وكما موضح أدناه :

إذا كان $A \neq 1$ فإن

$$y_{x+1} = Ay_x + B$$
$$= A(A^xY_0 + B\frac{1-A^x}{1-A}) + B$$
$$= A^{x+1}Y_0 + B(\frac{A - A^{x+1} + 1 - A}{1-A})$$
$$= A^{x+1}Y_0 + B(\frac{1-A^{x+1}}{1-A})$$

أما إذا كان $A = 1$ فإن

$$y_{x+1} = y_x + B$$
$$= (y_0 + BX) + B$$
$$= y_0 + B(X+1)$$

وهناك ثلاثة حالات خاصة لمعادلة الفروق :

$y_{x+1} = Ay_x + B$ تظهر خلال التحليلات الاقتصادية إلا وهي :

1- معادلة فروق من المرتبة الأولى ذات ثابت :

$$y_{x+1} - y_x = B \quad \dots (5\text{-}11)$$

ويكون حل هذه المعادلة :

$y_x = y_0 + BX$ وهو نفس الحل في (5-10)

2- معادلة فروق من المرتبة الأولى ذات تناسب مع المتغير وتنجم هذه الحالة عندما :

$$A = \frac{1}{1-\alpha}, \quad B = 0$$

وحيث تكون المعادلة :

$$Y_{x+1} - Y_x = \alpha Y_{x+1}$$

ويكون حل هذه المعادلة :

$$Y_x = (\frac{1}{1-\alpha})^x Y_0 \quad ...(5-12)$$

3- معادلة فروق من المرتبة الأولى وتشكل دالة خطية مع المتغير بالصيغة الآتية :

$$Y_{x+1} - Y_x = \alpha Y_{x+1} + B$$

وتنجم هذه الحالة عندما:

$$A = \frac{1}{1-\alpha}, \quad B = \frac{1}{1-\alpha}$$

ويكون حل هذه المعادلة :

$$Y_x = (\frac{1}{1-\alpha})^x Y_0 + \frac{B}{\alpha}[(\frac{1}{1-\alpha})^x - 1] \quad ...(5-13)$$

ملاحظة :

إذا كان $B = 0$ في معادلة الفروق $y_{x+1} = Ay_x + B$ فإنها تصبح كالآتي :

$y_{x+1} = Ay_x$ ويكون حلها حسب الصيغة (9 - 5) :

$y_x = A^x y_0$ وتسمى هذه المعادلة بالمعادلة المساعدة وسوف نحتاج لها عند مناقشة معادلة الفروق من الدرجة الثانية :

ولتوضيح حل معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة نأخذ الأمثلة الآتية :

مثال (1) :

حل المعادلة :

$$y_{x+1} = 2y_x + 2$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 2$

الجواب :

يلاحظ أن $A = 2$ أي أن $A \neq 1$

لذلك تؤخذ صيغة الحل المذكور في (5-9) وهو :

$$y_x = A^x y_0 + B\left(\frac{1-A^x}{1-A}\right)$$

$$= 2^x y_0 + 2\left(\frac{1-2^x}{-1}\right)$$

$$y_x = 2^x y_0 + \left(1-2^x\right)$$

$$Y_x = (Y_0 + 2)2^x - 2$$

وهو الحل العام

أما الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 2$ فإن :

$$y_x = (2+2)2^x + 2$$

$$= (2)^2(2^x - 2)$$

$$= 2^{x+2} - 2$$

مثال (2) :

حل المعادلة الآتية :

$$y_{x+1} + 3y_x = 0$$

وجد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 4$

الجواب :

نعيد صياغة المعادلة :

$$y_{x+1} = -3y_x$$

ويلاحظ أن $A \neq 1$ وذلك نأخذ الصيغة (5-9) كقاعدة لحل المعادلة :

$$y_x = A^x y_0 + B\left(\frac{1-A^x}{1-A}\right)$$

$$\therefore \quad y_x = (-3)^x y_0 + (0)(\frac{1+3^x}{1+3})$$

$$= (-3)^x y_0$$

وهو الحل العام

والحل الخاص إذا كانت $y_0 = 4$ هو :

$$y_x = (-3)^x 4$$

$$= 4(-3)^x \quad \text{او}$$

مثال (3) :

حل المعادلة الآتية :

$$2y_{x+1} - 2y_x + 6 = 0$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 5$:

الجواب :

نعيد صياغة المعادلة بعد القسمة على (2) ينتج :

$$y_{x+1} = y_x - 3$$

ويلاحظ هنا أن $A = 1$ ولهذا نطبق صيغة الحل كما في (5-10) :

وهي أيضاً مثالاً للحالة الخاصة رقم (1) المذكورة في (5-11)

$$y_x = y_0 - B$$

$$= y_0 - 3X$$

وهو الحل العام

وبذلك يكون الحل الخاص في حالة كون $y_0 = 5$:

$$y_x = 5 - 3X$$

الجزء الثالث

مثال (4):

جد حل المعادلة الآتية :

$$3y_{x+1} = 2y_x + 3$$

الجواب :

بعد إعادة الصياغة بالقسمة على (3) تكون المعادلة :

$$y_{x+1} = \frac{2}{3} y_x + 1$$

يلاحظ أن $A \neq 1$ ولهذا نطبق صيغة الحل في (5-9) :

$$y_x = A^x y_0 + B(\frac{1 - A^x}{1 - A})$$

$$= (\frac{2}{3})^x y_0 + 1[\frac{1 - (\frac{2}{3})^x}{1 - \frac{2}{3}}]$$

$$= (\frac{2}{3})^x y_0 + 3[1 - (\frac{2}{3})^x]$$

$$= (y_0 + 3)(\frac{2}{3})^x + 3$$

وهو الحل العام

مثال (5):

حل معادلة الفروق الآتية ثم جد الحل الخاص إذا كانت $y_0 = 2$:

$$y_{x+1} - y_x = \frac{1}{5} y_x + 1$$

الجواب :

تظهر المعادلة أعلاه كما في الحالة (2) الخاصة ويكون حلها حسب الصيغة (5-12)

$$Y_x = (\frac{1}{1-\alpha})^x Y_0$$

$$Y_x = (\frac{1}{1-\frac{1}{5}})^x Y_0$$

$$= (\frac{5}{4})^x Y_0$$

وهو الحل العام

أما الحل الخاص عندما $y_0 = 2$ فهو:

$$Y_x = (\frac{5}{4})^x 2$$

$$= 2(\frac{5}{4})^x$$

وللتحقق من صحة الحل إذا استخدمنا طريقة أخرى للحل بعد إعادة صياغة المسالة ينتج :

$$Y_{x+1} - \frac{1}{5} Y_{x+1} = Y_x$$

$$\frac{4}{5} Y_{x+1} = Y_x$$

$$Y_{x+1} = \frac{4}{4} Y_x$$

ويبدو هنا أن $A = \frac{5}{4} \neq 1$ مع ملاحظة أن $B = 0$

ولهذا نأخذ بطريقة الحل المذكورة في (5-9) لنحصل على :

$$Y_x = (\frac{1}{1-\alpha})^x Y_0$$

$$= (\frac{5}{4})^x Y_0$$

وهو نفس الحل العام أعلاه

مثال (6) :

حل معادلة الفروق الآتية ثم استخرج الحل الخاص بافتراض أن :

$$y_0 = 3$$

$$y_{x+1} - y_x = \frac{3}{4} y_{x+1} + 1$$

الجواب :

المعادلة أعلاه من الصنف الذي تنطبق عليه الحالة الخاصة (3) وبذلك يكون الحل حسب العلاقة (5-13) وكما يأتي :

$$Y_x = (\frac{1}{1-\alpha})^x Y_0 + \frac{B}{\alpha}[(\frac{1}{1-\alpha})^x - 1]$$

$$\therefore \quad Y_x = (4)^x Y_0 + \frac{1}{\frac{3}{4}}[(\frac{1}{1-\frac{3}{4}})^x - 1]$$

$$= (4)^x Y_0 + \frac{3}{4}(4)^x - \frac{4}{3}$$

$$= (4)^x (Y_0 + \frac{4}{3}) - \frac{4}{3}$$

ويكون الحل الخاص عندما :

$$Y_x = (4)^x (3 + \frac{4}{3}) - \frac{4}{3}$$

$$= 3(4)^x$$

وللتحقق من صحة الحل باستخدام طريقة أخرى بعد إعادة صياغة المعادلة كالآتي:

$$y_{x+1} - \frac{3}{4} y_{x+1} = y_x + 1$$

$$y_{x+1} = 4 y_x + 4$$

ويمكن تطبيق طريقة الحل المبينة في (5-9) لينتج :

$$y_x = A^x y_0 + B(\frac{1-A^x}{1-A})$$

$$\therefore \quad y_x = (4)^x y_0 + (4)(\frac{1+4^x}{1+4})$$

$$= (4)^x y_0 - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}(4)^x$$

$$= (4)^x (y_0 + \frac{4}{3}) - \frac{4}{3}$$

وهو نفس الحل العام أعلاه

5-6 سلوك تتابعية حل معادلة الفروق (أو المسار الزمني لمعادلة الفروق) Behavior Of The Solution Sequence

ويقصد بالتتابعية أو التواتر كما تسمى في بعض الأحيان بجملة الكميات المرتبة تبعا لقانون خاص، فإذا علم قانون تكوين التتابعية أمكن معرفة أي واحد من هذه الكميات. والتتابعية هي دالة لقيم صحيحة موجبة تعطى للمتغير المستقبل، ومن هذا

نستنتج بان حل معدلة الفروق هو تتابعي . وعندما يكون الزمن هو المتغير المستقل فإن التتابعية تدعى أحيانا بالمسار الزمني للمتغير المعتمد .

وفي معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى يوفر تحديد y_0 تتابعية الحل الآتي :

$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, ...$ وكل حد من هذه الحدود يستخرج طبقا لمعادلة الفروق:

$$y_{x+1} = Ay_x + B \qquad x = 0,1,2,3,...$$

أو وفقاً لحل المعادلة :

$$y_x = A^x y_0 + B(\frac{1-A^x}{1-A})$$

إذا كانت

$$A \neq 1 \quad , \quad X = 0,1,2,3,....$$

$$y_x = Ay_0 + BX$$

إذا كانت

$$A = 1 \quad , \quad X = 0,1,2,3,.....$$

وحيث أن A , B معطاة لهذه فإن تعيين y_0 يحدد تتابعية الحل للأعداد الحقيقية . أن المسار الزمني لحل معادلة الفروق يحتل مساحة في الكثير من التطبيقات العملية وان هذا السلوك يعتمد على قيم كل من (y_0, A, B) كما يظهر في الجدول رقم (5-1) والشكل (5-1) أيضاً حيث تتوضح الرسوم البيانية لكل حالة سلوكية في الجدول . ومن ملاحظة النتائج التي يحتويها الجدول (5-1) يمكن إيجازها عن طريق المبرهنة الآتية

مبرهنة :

يكون لمعادلة الفروق من الدرجة الأولى الخطية الآتية :

$$y_{x+1} = Ay_x + B$$

حل هو :

$$(5\text{-}14) \ldots y_x = A^x (y_0 - y^x) + y^x$$

إذا كانت

$$A \neq 1 \quad , \quad X = 0,1,2,3,\ldots.$$

$$(5\text{-}15) \ldots y_x = y_0 + BX$$

إذا كانت

$$A \neq 1 \quad , \quad X = 0,1,2,3,\ldots.$$

حيث أن:

$$Y^* = \frac{B}{1 - A}$$

وإذا كان $(-1 < A < 1)$

فإن: المسار الزمني للحل يقترب من y^* وعدا ذلك فانه يفترق منه باستثناء $y_x = y_0$

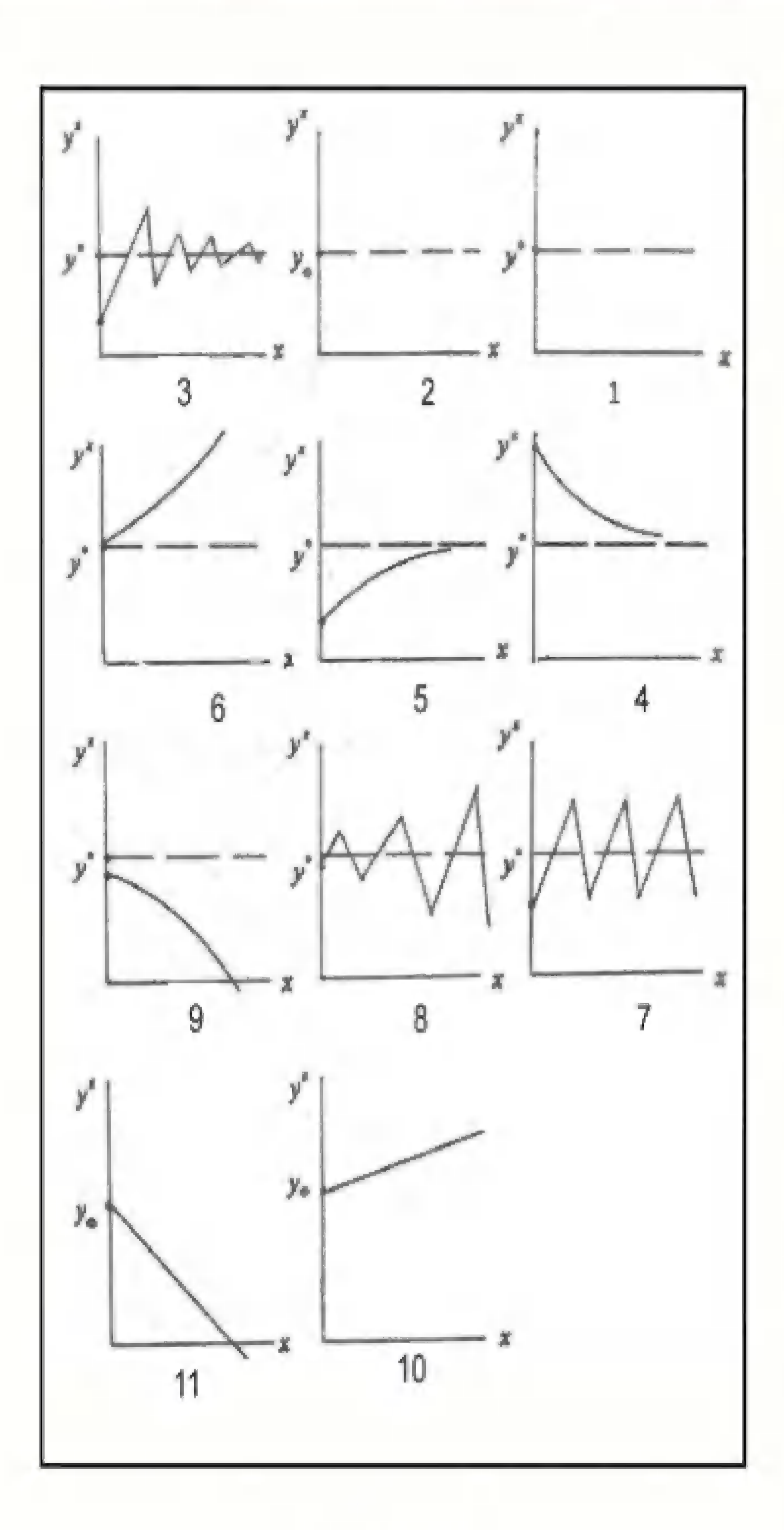
جدول رقم (5-1)

المسار الزمني لحل معادلة الفروق $y_{x+1} = Ay_x + B$

الحالة	Y_0	A	B	Y_x Y_x $X = 1,2,3,\ldots$	سلوك تتابعية الحل
1	$Y_0 = Y^*$	$A \neq 1$	—	$Y_x = Y^*$	$Y_x = Y^*$ ثابت
2		$A = 1$	$B = 0$	—	$Y_x = Y_0$ ثابت
3	$Y_0 \neq Y^*$	$-1 < A < 0$	—	—	تقارب نحو y^* (تذبذب متضائل)

الحالة	Y_0	A	B	Y_x Y_x $X = 1,2,3,\ldots$	سلوك تتابعية الحل
4	$Y_0 > Y^*$	$0 < A < 1$	—	$Y_x > Y^*$	تقارب نحو y^* (تناقص مضطرد)
5	$Y_0 < Y^*$	$0 < A < 1$	—	$Y_x < Y^*$	تقارب نحو y^* (تزايد مضطرد)
6	$Y_0 > Y^*$	$A > 1$	—	$Y_x > Y^*$	افتراق نحو ∞ + (تزايد مضطرد)
7	$Y_x \neq Y^*$	$A = -1$	—	—	افتراق (تذبذب بحدود)
8	$Y_0 \neq Y^*$	$A < -1$	—	—	افتراق (تذبذب بلا حدود)
9	$Y_0 < Y^*$	$A > 1$	—	$Y_x < Y^*$	افتراق نحو ∞ - (تناقص مضطرد)
10	—	$A = 1$	$B > 0$	$Y_x > Y_0$	افتراق نحو ∞ + (تزايد مضطرد)
11	—	$A = 1$	$B < 0$	$Y_x < Y_0$	افتراق نحو ∞ - (تناقص مضطرد)

أما الرسوم البيانية لمكونات الجدول (5-1) فتظهر كما يأتي :



شكل رقم (1-10)

ولتوضيح ذالك نأخذ بعض الأمثلة :

مثال (1) :

حل معادلة الفروق الآتية وحدد المسار الزمني للحل واحسب بعض من القيم الأولى من التابعية

:

$$8y_{x+1} + 2y_x - 4 = 0$$

$$Y_x = 0$$

و

الجواب :

بالقسمة على (8) وإعادة الصياغة ينتج :

$$8y_{x+1} = -\frac{1}{4}y_x + \frac{1}{2}$$

ويلاحظ أن :

$$B = \frac{1}{2} \quad , \quad A = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad y_x = A^x y_0 + B(\frac{1 - A^x}{1 - A})$$

$$= (-\frac{1}{4})^x y_0 + \frac{1}{2}[\frac{1-(-\frac{1}{4})^x}{1-(-\frac{1}{4})}]$$

$$= (-\frac{1}{4})^x y_0 + \frac{2}{5}[1-(-\frac{1}{4})^x]$$

$$= (-\frac{1}{4})^x (y_0 - \frac{2}{5}) + \frac{2}{5}$$

وعندما $Y_x = 2$ فإن :

$$Y_x = \frac{8}{5}(-\frac{1}{4})^x + \frac{2}{5}$$

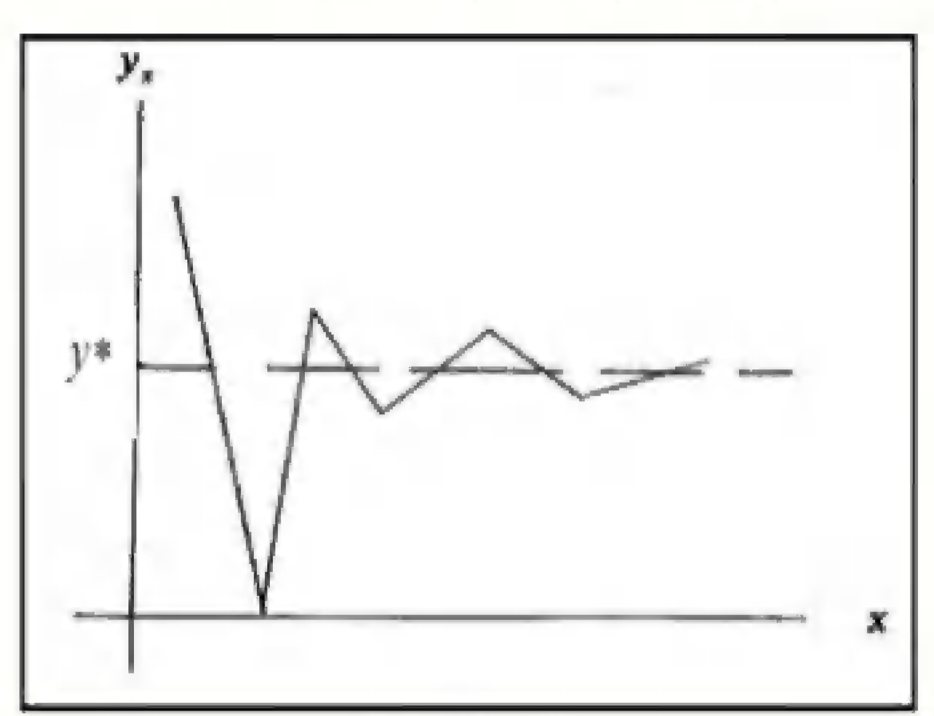
وهو الحل الخاص

وحيث أن : $B = \frac{1}{2}$ ، $A = -\frac{1}{4}$

$$\therefore \quad y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{2}{5}$$

إذن الحالة التي تسلكها تتابعية الحل هي الحالة (3) لأن $A > 1$ و وتشير الحالة (3) إلى تقارب نح y^* بتذبذب متضائل . كما يظهر في الشكل رقم (2-5) الأتي وكما تشير القيم الأولى من الحل وهي :

$$Y_0 = 2,\quad Y_1 = 0,\quad Y_2 = \frac{1}{2},\quad Y_3 = \frac{3}{8},\quad Y_4 = \frac{51}{128}$$



شكل رقم (2-10)

مثال (2):

حل معادلة الفروق الآتية وحدد المسار الزمني للحل واحسب القيم الأولى من الحل :

$$2y_{x+1} - y_x = 2$$

و $Y_0 = 4$

الجواب :

بالقسمة على (2) وإعادة الترتيب ينتج :

$$y_{x+1} = \frac{1}{2} y_x + 1$$

ويظهر من ذلك أن :

$$B = 1 \ , \quad A = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad y_x = (\frac{1}{2})^x y_0 + 1[\frac{1-(\frac{1}{2})^x}{1-(\frac{1}{2})}]$$

$$= (\frac{1}{2})^x y_0 + 2[1-(\frac{1}{2})^x]$$

$$= (\frac{1}{2})^x (y_0 - 2) + 2$$

وهو الحل العام

وعندما $Y_0 = 4$ فإن :

$$y_x = 2(\frac{1}{2})^x + 2$$

وهو الحل الخاص

وحيث أن :

$$y^* = \frac{B}{1-A} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

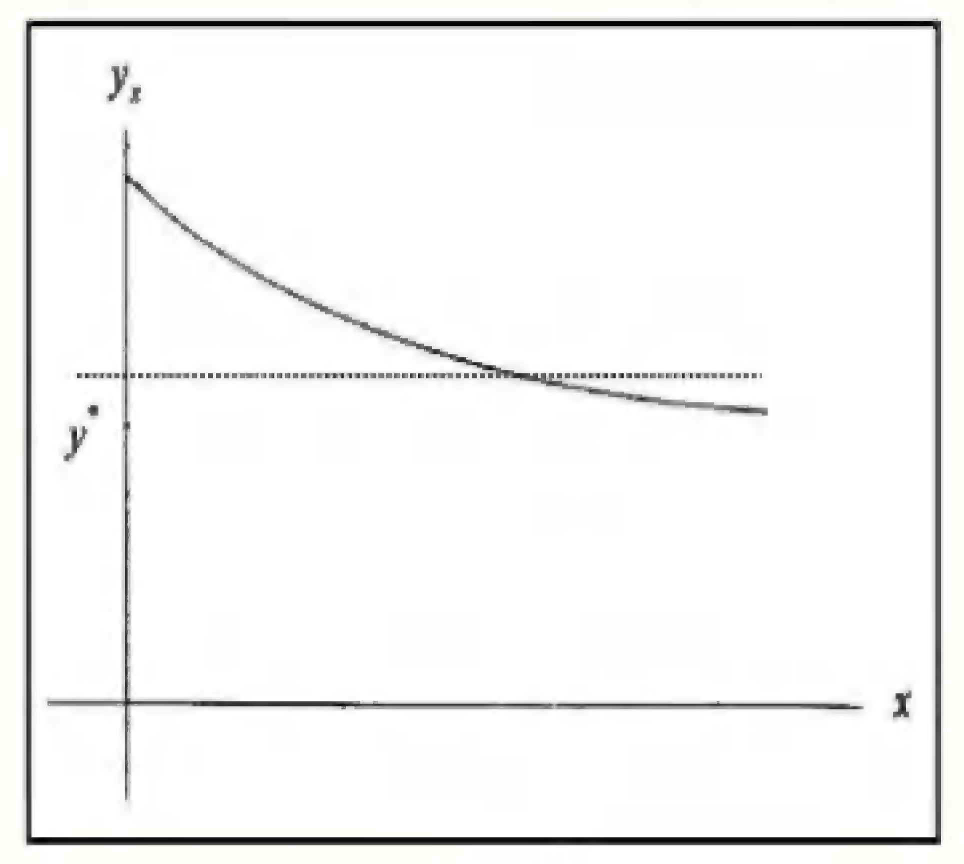
و $A = \frac{1}{2}, \quad B = 1,$

أي أن $A > 1$ وان $Y_0 > Y^*$ و $Y_x > Y^*$

إذا الحالة السلوكية هي الحالة (4) التي تشير إلى تقارب نحو y^* وبتناقص مضطرد ويتبين هذا عند حساب بعض من القيم الأولى ل Y_x فنحصل على:

$$Y_1 = 3,\ \ Y_2 = \frac{5}{2},\ \ Y_3 = \frac{9}{4},\ \ Y_4 = \frac{17}{18}, \ .....$$ وهكذا

كما يظهر في الشكل رقم (3-5) :



شكل رقم (3-5)

5-7 التوازن والاستقرار Equilibrium And Stability

إذا كان لمعادلة الفروق حل يأخذ شكل دالة ثابتة مثل $Y_x = Y^*$ فإن قيمة y^* بالنسبة لهذه الدالة تدعى بقيمة التوازن أو الاستقرار للمتغير y_x .

وتكون قيمة التوازن y^* مستقر إذا كان أي حل لمعادلة الفروق يقترب من y^* وبصورة مستقلة عن الشروط الأولية .

إن هذا النوع من الاستقرار يشار إليه في الأدب الاقتصادي بالاستقرار التام من النوع الأول (**Perfect Stability Of The First Kind**) أن الابتعاد عن قيمة التوازن يعني حالا جديدا بشروط أولية مختلفة ولهذا فالتوازن المستقر يمكن أن يعرف بأنه الحالة

التي إذا انحرفت عن التوازن ستعقبها سلسلة من القيم للمتغير(y) التي تعود بها مرة ثانية للاقتراب من التوازن .

مبرهنة:

يكون لمعادلة الفروق التالية :

$$y_{x+1} = Ay_x + B$$

قيمة التوازن لـ y تصاغ كالآتي :

$$y^* = \frac{B}{1-A}$$ إذا كانت $A \neq 1$ ... (5-16)

وتكون y^* مستقرة إذا وإذا فقط ($-1 < A < 1$) باستثناء إذا كانت y_x ثابت . ويلاحظ أن هذه المبرهنة تستند على المبرهنة السابقة ولهذا فإن التوازن يظهر فقط في الحالات (1 , 2 , 3 , 4 , 5 ,) من الدول رقم (5-1) .

ولتوضيح ذلك : نقول إن أي مقدار ثابت مثل قيمة ($0 < C < 1$) ومرفوعة إلى قوة (T) يصغر هذا المقدار كلما ازدادت قيمة (T) ويقترب من الصفر إذا ($T \to \infty$) كذلك فا ن أي مقدار ثابت قيمته ($-1 < C < 0$) ومرفوعة لقوة (T) فإن قيمته تصغر بتذبذب كلما ازدادت قيمة (T) ويقترب من الصفر إذا ($T \to \infty$) ومن ملاحظة الصيغة (5-14) وهي ($y_x = A^x(y_0 - y^x) + y^x$) وعندما ينظر إلى المسالة على كون $A = C$ ، $X = T$ يتبين أن المقدار الثابت C المذكور أعلاه هو A في الصيغة أعلاه ولهذا عندما يكون :

$-1 < A < 1$ ، $X \to \infty$ ، $A^x \to 0$ وتبعا لذلك فإن قيمة $A^x(Y_0 - Y^*) \to 0$ وبذلك فإن $Y_x \to Y^*$ لتبلغ حالة الاستقرار . وكلما كانت قيمة A صغيرة كلما كان بلوغ حالة الاستقرار أسرع .

إن مراجعة الجدول رقم (5-1) تعطينا فكرة عن الحالات الأخرى لعلاقة y_x بحالة التوازن y^* :

فالحالة الانفجارية تحدث عندما $A > 1$ وهي الحالة رقم (6) أو التي يكون فيها مآل y_x الافتراق عن حالة التوازن y^* ويتزايد مضطرد باتجاه $+\infty$ وكلما ازدادت قيمة A كان الانفجار أسرع . كما يحدث الانفجار عندما $A > 1$ ولكن الافتراق عن حالة التوازن y^* يتجه نحو $-\infty$ وهي الحالة رقم (9) في الجدول .

أما حالة الانفجار المتذبذب فيحدث عندما $A < -1$ حيث يفترق y_x من y^* بتذبذب متزايد كما في الحالة رقم (8) من الجدول.

ولدينا أيضا حالة الافتراق المضطرد عندما $A = 1$ حيث لا يمكن في هذه الحالة استخراج قيمة y^* والتي تساوي $\frac{B}{1-A}$.

وعندها ننقل إلى الصيغة الثانية من الحل وهي (5-15) في حساب $y_x = y_0 + BX$ ، وهنا تتحدد قيمة y_x بالمقارنة مع y_0 بقيمة B فإذا كانت $B > 0$ تكون $Y_x > Y_0$ وهذا يؤدي إلى افتراق نحو $+\infty$ وبتزايد مضطرد كما في الحالة (10) من الجدول . أما إذا كانت $B < 0$ فتكون $Y_x < Y_0$ وهذا يؤدي إلى افتراق نحو $-\infty$ وبتناقص مضطرد كما مبين في الحالة رقم (11) من الجدول . وعندما B = 0 فإن $Y_x = Y_0$ وهي حالة الاستقرار الثابت والتي تحمل رقم (2) في الجدول .

وأخيرا لدينا الحالة رقم (7) من الجدول وهي الحالة التي يكون فيها $A = -1$ وعندها يكون y_x مفترقا ولكن بتذبذب محدد .

8-5 معادلات الفروق الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة Linear Second –Order Difference Equations With Constant Coefficients

تكتب معادلة الفروق الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة بالصيغة الآتية:

$$(5\text{-}17)\ \ldots\ y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = g(x)$$

ولنأخذ الحالة الخاصة التي هي :

$$g(x) = 0$$

$$(5\text{-}18)\ \ldots\ y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

ومعادلة الفروق التي قيمة معاملها الثابت (g (x يساوي صفرا تدعى أحياناً بالمعادلة المتجانسة ولهذا فإن :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

هي معادلة فروق خطية متجانسة من المرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة مع ملاحظة بأنه ينبغي التميز بين تعريف المعادلة المتجانسة وتعريف الدالة المتجانسة . فمن اجل استخراج حل المعادلة :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

نحتاج لتكوين المعادلة المساعدة والتي تشتق حسب الخطوات الآتية :

الفصل الخامس

ذكرنا في الفقرة (5-5) أن حل معادلة الفروق من الشكل :

$y_{x+2} = Ay_x$ هو $y_x = A^x y_0$

وإذا عوضنا هذا الحل في المعادلة (5-18) مع الأخذ بعين الاعتبار الفترات التباطؤية نحصل على تسهيل عمليات الحل دعنا نعيد كتابة معادلة الحل بالصيغة الآتية :

$$y_x = M^x y_0$$

فنحصل على :

$$M^{x+2} y_0 + A_1(M^{x+1} y_0) + A_2(M^x y_0) = 0$$

وبالقسمة على $M^x y_0$ ينتج:

$$M^2 + A_1 M + A_2 = 0$$

إن هذه المعادلة المساعدة هي معادلة من الدرجة الثانية ويمكن إيجاد حلها عن طريق التحليل إلى العوامل إذا كانت قابلة للتحليل أو عن طريق ما يسمى بالدستور أو القانون الخاص بحل المعادلات من هذا النوع وذلك لغرض استخراج قيمة جذري المعادلة أي القيمتين اللتين تظهران نتيجة لحل المعادلة المساعدة بطريقة الدستور للمتغير M وقد سميت هاتين القيمتين بـ (M_1 , M_2) وكما موضح في أدناه :

المعادلة المساعدة كما في الصيغة أعلاه هي :

$$M^2 + A_1M + A2 = 0$$

وعند حل هذه المعادلة بطريقة الدستور نحصل على :

$$M_1 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2} \quad , \quad M_2 = \frac{-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2}$$

ويمكن أن تكون قيمة هذين الجذرين (M_1 , M_2): حقيقية وغير متساوية أو حقيقية متساوية أو مركبة أي إنها تحتوي على جذر تربيعي لعدد سالب. ويعتمد حل المعادلة :

$y_{x+2} + A_1y_{x+1} + A_2y_x = 0$ على طبيعة الجذرين (M_1 , M_2) كما مبين أدناه ، مع الإشارة إلى أن الحل العام للمعادلة يتضمن ثابتين عشوائيين هما (C_1 , C_2) ولهذا فإن الحل الخاص يوصف بشرطين أوليين أي بقيمتين لـ (Y) :

الحالة الأولى :

إذا كانت قيمة (M_1 , M_2) حقيقية وغير متساوية $M_1 \neq M_2$ ويكون الحل:

$$(5\text{-}19) \ldots y_x = C_1M_1^x + C_2M_2^x$$

الحالة الثانية :

إذا كانت قيمة (M_1 , M_2) حقيقية ومتساوية $M_1 = M_2 = M$ ويكون الحل :

$$(5\text{-}20) \ldots y_x = C_1M^x + C_2XM^x$$

الحالة الثالثة :

إذا كانت قيمة (M_1, M_2) أي أن :

$$M_1 = A + Bi \ , \ M_2 = A - Bi \quad Wher \quad i = \sqrt{-1}$$

ويكون الحل :

$$(5\text{-}21) \ \ldots Y_x = r^x(C_1 \cos \ AX + C_2 \ \sin \ AX$$

حيث أن

$$r = \sqrt{A^2 + B^2}$$

أما θ فهي زاوية فيها:

$$\tan \ \theta = \frac{A}{B}$$

وكبديل لذلك فإن :

$$\sin \ \theta = \frac{A}{R}$$

$$los \ \ \theta = \frac{B}{R}$$

ملاحظة :

راجع ملحق هذا الفصل عن كيفية تمثيل الأعداد المركبة.

ويمكن استبدال كل من A , B احدهما محل الآخر في التعاريف أعلاه مادامت الدالة المثلثية دورية . ويكون من المناسب أن يكتب الحل عادة بالنسبة لـ θ في الربع الأول.

ولتوضيح إجراءات الحل أعلاه نأخذ الأمثلة الآتية :

مثال (1) :

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 4y_x = 0$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت

$$y_1 = 0, y_o = 3$$

<u>الجواب:</u>

نشكل المعادلة المساعدة

$$m^2 5m + 4 = 0$$

ومنها نستخرج قيمة كل من m_1, m_2 كما يأتي:

$$m_1 = \frac{5+\sqrt{25-16}}{2} = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$m_2 = \frac{5-\sqrt{25-16}}{6} = \frac{5-3}{2} = 1$$

وبذلك يكون الحل العام كما في الحالة الأولى لأن $m_1 \neq m_2$ وقيمة كل منها حقيقية:

$$y_x = c_1(4)^x + c_2(1)^x$$

$$= c_1(4)^x + c_2$$

وإذا كان $y_0 = 3$ ، $y_1 = 7$ فإن الحل الخاص يكون:

$$3 = c_1 + c_2$$

هنا $x = 0$

$$7 = c_1 4^1 + c_2$$

$$= 4c_1 + c_2$$

هنا $x = 1$

وبحل المعادلتين آنياً:

$$3 = c_1 + c_2$$

$$7 = 4c_1 + c_2$$

$$\therefore c_1 = 3 - c_2$$

وبالتعويض بالمعادلة الثانية ينتج :

$$7 = 4(3 - c_2) + c_2$$

$$7 = 12 - 3c_2$$

$$\therefore c_2 = \frac{5}{3}, c_1 = \frac{4}{3}$$

إذن الحل الخاص يكون :

$$y_x = \frac{4}{3}(4)^x + \frac{5}{3}$$

مثال (2) :

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+1} + 2y_{x+1} + y_x = 0$$

الجواب :

نشكل المعادلة المساعدة وهي

$$m^2 + A_1 + A_2 = 0$$

نحصل على :

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$\therefore m_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(1)}}{2} = -1$$

$$m_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4(1)}}{2} = -1$$

وبهذا يتضح بأن :

$$m_1 = m_2 = m$$

إذن الحل العام يكون كما مبين في الحالة الثانية :

$$y_x = c_1 m^x + c_2 x m^x$$

$$= c_1(-1)^x + c_2 x(-1)^x$$

$$\therefore y_x = (c_1 + c_2)(-1)^x$$

<u>مثال (3) :</u>

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+2} + 2y_x = 0$$

<u>الجواب :</u>

نشكل المعادلة المساعدة :

$$m_2 + A_1 m + A_2$$

فنحصل على :

$$m^2 - (0)m + 2 = 0$$

$$\therefore m^2 + 2 = 0$$

حيث أن $A_1 = 0 . A_2 = 2$

$$\therefore m_1 = \frac{-(0) + \sqrt{(0)^2 - 4(2)}}{2} = \frac{\sqrt{-8}}{2}$$

$$m_2 = \frac{-(0) - \sqrt{(0)^2 - 4(2)}}{2} = \frac{\sqrt{-8}}{2}$$

والآن:

$$m_1 = \frac{\sqrt{-8}}{2} = \frac{\sqrt{(-1)(2)(4)}}{2} = \frac{2}{2}\sqrt{2}\sqrt{-1} = \sqrt{2}i$$

$$m_2 = \frac{\sqrt{-8}}{2} = \sqrt{2}i$$

من النتائج يتبين أن :

$$m_2 = a + bi = (0) - \sqrt{b}i, m_1 = abi = (0) + \sqrt{2}i$$

وبما أن النتائج تظهر بأن m_1 , m_2 أعدادا مركبة إذن نطبق الحالة الثالثة للحل وهي:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(0)^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

$$\tan = \frac{a}{b} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

أو كبديل لذلك :

$$\sin\theta = \frac{a}{r} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\cos\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

ومن الجدول رقم (3-1) من الفصل الثالث يظهر بأن $\theta = 0$ وهذا يؤدي إلى أن يكون الحل العام برمته صفراً وحيث يمكن إبدال a,b كل محل الأخر لان الدالة المثلثية دورية إذن تكون لدينا النتائج التالية :

$$\tan = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{2}}{0} = not\ difined$$

$$\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\cos\theta = \frac{a}{r} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0$$

ومن الجدول رقم (3-1) أعلاه يتبين $\theta = \frac{\pi}{2}$ وبذلك يكون الحل العام :

$$y_x = r^x (c_1 \cos\theta x + c_2 \sin\theta x)$$

$$= (\sqrt{2})^2 (c_1 \cos\frac{1}{2}\pi x + c_2 \sin\frac{1}{2}\pi x)$$

<u>مثال (4) :</u>

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+2} - 2y_{x+1} + 2y_x = 0$$

<u>الجواب:</u>

$$m^2 + A_1 m + A_2 = 0$$

حيث أن :

$$(A_1 = -2, A_2 = 2)$$

$$\therefore m^2 - 2m + 2 = 0$$

$$m_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{(-2)^2 - 4(2)}}{2} = \frac{2 + \sqrt{-4}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{-4}}{2} =$$

$$1 + \frac{\sqrt{(-1)(4)}}{2} = 1 + (1)\sqrt{-1} = 1 + i$$

$$m_2 = 1 - (1)\sqrt{-1} = 1 - i$$

ومن النتيجة أعلاه يظهر أن :

$$m_1 = a + bi = 1 + (1)i = 1 + i$$

و $m = a - bi = 1 - (1)i - 1 - i$

ويظهر أن $b = 1, a = 1$ وهكذا نستطيع استخراج r كالآتي :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \sin\theta = \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan = \theta = \frac{a}{b} = 1$$

ومن الجدول (3-1) من الفصل الثالث يظهر أن :

$$\theta = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\therefore y_x = (\sqrt{2})^x (c_1 \cos\frac{\pi}{4}x + c_2 \sin\frac{\pi}{4}x)$$

9-5 المسار الزمني لحل معادلة الفروق الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة Behavior of the solution sequence

يستند المسار الزمني لحل معادلة الفروق الخطية من المرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة (أو كما سميناه سلوك تتابعيه الحل) على كل من المعادلة نفسها وعلى الشروط الأولية، وتؤثر جذور المعادلة المساعدة حدود المسار الزمني للحل كما مبين في أدناه:

الفصل الخامس

الحالة الأولى:

إذا كانت m_1, m_2 جذور حقيقية وغير متساوية ($m_1 \neq m_2$) وكانت القيمة المطلقة للجذر m_1 هي الأكبر، أي أن:

$|m_1| > |m_2|$ إذن تكون حدود المسار الزمني للحل هي :

$(c_1 m_1^x + c_2 m_2^x)$ هو نفسه $c_1 m_1^x$ بشرط أن $c_1 \neq 0$ وهذا يمكن إيضاحه عن طريق كتابة

:

$$(\frac{m_1}{m_2})^x \to 0, -1 < \frac{m_1}{m_2} < 1 \text{ مادام } c_1 m_1^x + c_2 m_2^x = m_1^x [c_1 + c_2 (\frac{m_1}{m_2})^x]$$

إذا ما $x \to \infty$

كما أن : $\frac{c_1 m_1^x}{c_1 m_1^x c_2 m_2^x} = \frac{c_1}{c_1 + c_2 (\frac{m_1}{m_2})^x} \to \frac{c_1}{c_1} = 1 \ as \ x \to \infty$

ولهذا فإن حدود مسار $(c_1 m_1^x + c_2 m_2^x)$ هو نفسه حدود مسار $c_1 m_1^x$ إذا $|m_1| > |m_2|$.

إن حدود مسار $c_1 m_1^x$ كان قد شرح تفضيلياً في الفقرة (5-6) جدول رقم (5-1) حيث تطرقنا فيها إلى المسار الزمني لحل معادلة فروق من المرتبة الأولى ، مع ملاحظة إحلال m بدلاً من الموجودة في الجدول وكما يأتي :

إذا كانت $|m_1| \leq 1$ فإن المسار يقترب.

إذا كانت $|m_1| >$ فإن المسار يفترق. الحالة (6،9)

إذا كانت $-1 < m_1 < 0$ فإن المسار يتذبذب بتضاؤل ... الحالة (3)

أما إذا كانت $m < -1$ فإن المسار يتذبذب بلا حدود ... الحالة (8)

وإذا كانت c = 0 فإن مسار الحل هو $c_2 m_2^x$ كما أن نفس الاعتبارات صالحة للتطبيق على هذا المسار ويلاحظ أيضاً :

إذا كانت $y_0 = c_2 , y_1 = c_2 m_2 , c_0$

الحالة الثانية :

إذا كانت m_1, m_2 جذور حقيقية متساوية أي أن $m_1 = m_2 = m$:

فإن الحل التتابعي أي المسار هو $[c_1 + c_2 x) m^x]$ وهذا الحل يفترق إذا $|m| > 1$ باستثناء $c_1 = c_2 = 0$ وكذلك يفترق إذا $|m| = 1$ باستثناء $c_2 = 0$

أما إذا $|m| < 1$ فإن المسار $x\ m^x$ يقترب من الصفر $[c_1 + c_2 x) m^x]$ هو أيضا يقترب من الصفر ، وإذا كانت m سالبة فإن المسار يتذبذب.

الحالة الثالثة :

إذا كانت الجذور مركبة أي أن :

$$m_1 = a + bi, m_2 = a - bi$$

فإن المسار يتذبذب، ويقترب من الصفر إذا $0 < \sqrt{a^2 + b^2} < 1$ ويفترق إذا $\sqrt{a^2 + b^2} > 1$

والحالات الثلاثة أعلاه تغطي الأصناف المختلفة لمسار الحل لمعادلة الفروق الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

ويكون الأمر كذلك حتى في حالات التي تكون فيها القيم كل c_1, c_2 ابتدائية نادرة، أو إذا كانت قيم الاثنين صفراً.

إلا انه هناك حالة واحدة يقترب فيها مسار حل معادلة الفروق الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية من الصفر إذا احتمل وجود أي زوج من القيم الابتدائية كما مبين في المبرهنة الآتية :

مبرهنة :

إذا كانت $\lambda = \max(|m_1|, |m_2|)$ حيث أن m_1, m_2 هما جذرا المعادلة المساعدة لمعادلة الفروق الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية :

$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$ فإن : $\lambda < 1$ هو شرط ضروري وكاف لسلوك الحل $\{y_x\}$ كي يقترب مع النهاية صفر لكل القيم الأولية لـ (y_0, y_1) وبشكل أكثر تلخيصاً فإن الحالات الثلاث تبين حدود λ :

الحالة الأولى:

m_1, m_2 قيم حقيقة وغير متساوية فإن :

$$\lambda \max(|m_1|, |m_2|)$$

الحالة الثانية :

m_1,m_2 قيم حقيقة و متساوية : $m_1,m_2= m$ فإن :

$$\lambda = |m|$$

الحالة الثالثة :

m_1,m_2 قيم مركبة أي أن :

$$m_1 = a + bi$$

$$m_2 = a - bi$$

فإن :

$$\lambda = \sqrt{a^2 + b^2}$$

لنأخذ المثال التوضيحي الأتي :

في المثال رقم (1) في الفقرة السابقة وهو :

$$y_{x+2} + 5y_{x+1} + 4y_x = 0$$

وجد الحل العام لمعادلة الفروق أعلاه كان بالصيغة الآتية :

$$y_x = c_1 4^x + c_2 (1)^x$$

ومادام $m_1 = 4, m_2 = 1$ فهذا يعني أن $1 < \lambda$ وكذلك يعني أن : $1 < |m|$

ومن ذلك نستنتج بان مسار الحل يفترق كما يظهر من حساب بعض القيم الأولى من الحل الخاص للمعادلة وهي :

خذ :

$$y_x = \frac{4}{3}(4)^x + \frac{5}{3}(1)^x$$

ومن ذلك نستخرج :

$$Y_0 = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$$

$$Y_1 = \frac{4}{3}(4) + (\frac{5}{3})(1) = 7$$

$$y_2 = \frac{4}{3}(4)^2 + (\frac{5}{3})(1)^2 = 23$$

$$y_3 = \frac{4}{3}(4)^3 + (\frac{5}{3})(1)^3 = 87$$

وهكذا..

وتظهر النتائج أن سلوك مسار الحل يفترق نحو ∞ + كما في الحالة (6.9) من الجدول (5-1).

وفي المثال السابق رقم (2) السابق :

كان الحل العام هو :

$$y_x = (c_1 + c_2 x)(-1)^x$$

وكانت $m_1 = -1, m_2 = -1$ فإن $\lambda = |m| = 1$

ومن ذلك يظهر أن سلوك مسار الحل يفترق لان $|m| = 1$ كما مؤشر في الحالة (2). ودعنا نجد الحل الخاص للمعادلة بهدف الوقوف على القيم الأولى للحل لنؤكد سلوكية الحل ولنفترض من اجل أيجاد الحل الخاص أن :

$$y_0 = 2 \ , y_1 = 0$$

فالحل الخاص يكون :

$$y_0 = (c_1 + c_2(0)(-1)^0$$

$$\therefore 2 = c_1$$

$$y_1 = (c_1 + c_2(0)(-1)^1$$

$$\therefore 5 = -c_1 - c_2$$

$$c_1 = 2$$

ومن المعادلة أعلاه نعوض قيمة $c_1 = 2$ ينتج :

$$5 + 2 = -c_2$$

$$\therefore c_2 = -7$$

والان لنرى سلوك القيم الأولى من الحل الخاص للمعادلة :

$$y_0 = [2 - 7(0)](-1)^0 = 2$$

$$y_1 = [2 - 7(1)](-1)^1 = 5$$

$$y_2 = [2 - 7(2)](-1)^2 = -12$$

$$y_3 = [2 - 7(3)](-1)^3 = 19$$

$$y_4 = [2 - 7(4)](-1)^4 = -26$$

وهكذا..

وكما تبين النتائج أن سلوك مسار الحل هو الافتراق والتذبذب بلا حدود لان (m)سالبة كما مبين في الحالة (8) من الجدول (5-1).

10-5 معادلات الفروق غير المتجانسة من المرتبة الثانية Nonhomogeneous Second – Order Difference Equations

كما مر بنا سلفاً تكتب معادلة الفروق الخطية المتجانسة من المرتبة الثانية كالآتي :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

وكان حلها هو y_c أما معادلة الفروق غير المتجانسة من المرتبة الثانية كالآتي :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = (g)$$

وإن حلها العام يكون $\bar{y} + y_c$ حيث أن $\bar{y}$ هو أي حل خاص للمعادلة غير المتجانسة وان صيغة $\bar{y}$ تعتمد على صيغة g(x).

وهناك عدة طرق لاستخراج قيمة $\bar{y}$ ومن ضمنها طريقة (عدم تحديد المعاملات) التي تتلخص في أدناه :

طريقة عدم تحديد المعاملات

نفترض أن g(x) ثابت ولنرمز له بالحرف k إذن :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = k \qquad (5-22)$$

ونفترض أيضا أن $y_x = z_x$ هو الحل العام للمعادلة المتجانسة التالية :

$$y_{x+2} + A_1 y_{x+1} + A_2 y_x = 0$$

وبذلك نستطيع الوصول إلى حل المعادلة غير المتجانسة حسب الصيغة :

$$Y_x = Z_x + L \qquad (5-23)$$

حيث أن L هو ثابت ، وبهذا تصبح المعادلة (5-22) بالصيغة :

$$(Z_{x+2} + L) + A_1(Z_{x+1} + L) + A_2(Z_{x+1} + L) = K$$

$$Z_{x+2} + A_1 Z_{x+1} + A_2 Z_{x+1} + (1 + A_1 + A_2)L = K$$

ولكن

$$Z_{x+2} + A_1 Z_{x+1} + A_2 Z_{x+1} = 0$$

وذلك لان Z_x هو حل المعادلة المتجانسة وبهذا ينتج :

$$(1 + A_1 + A_2)L = K$$

$$\therefore L = \frac{K}{1 + A_1 + A_2} \qquad (5-24)$$

ومن ذلك نستنتج بأن حل المعادلة غير المتجانسة يكون حسب الصيغة (5-23) بعد تعويض قيمة L كما في (5-24) أي أن :

$$\therefore Y_x = Z_x \frac{K}{1 + A_1 + A_2} \qquad (5-25)$$

ولإيضاح ذلك نتناول المثال الآتي :

مثـال:

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+2} - 5y_{x+1} + 6y_x = 12$$

وجد الحل الخاص للمعادلة إذا كانت القيم الأولية

$y_1 = 42$, $y_0 = 20$

الجـواب:

نشكل المعادلة المساعدة :

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

حيث أن $A_1 = -5, A_2 = 6$

$$(m-3)(m-2) = 0$$

$$\therefore m = 3$$

$$m_2 = 2 \qquad \text{أو}$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة :

$$y_x = c_1 m_1^x + c_2 m_2^x$$

$$= c_1(3)^x + c_2(2)^x$$

والحل العام للمعادلة غير المتجانسة :

$$y_x = \left[c_1 m_1^x + c_2 m_2^x\right] + \frac{K}{1 + A_1 + A_2}$$

$$= c_1(3)_1^x + c_2(2)_2^x + \frac{12}{1-5+6}$$

$$\therefore y_x = c_1(3)_1^x + c_2(2)_2^x + 6$$

الجزء الثالث

ولما كان

$$y_1 = 42 \ , y_0 = 20$$

فإن الحل الخاص يكون :

$$y_0 = c_1(3)^0 + c_2(2)^0 + 6$$

$$20 = c_1 + c_2 + 6$$

$$\therefore c_1 + c_2 = 14$$

$$y_1 = c_1(3)^1 + c_2(2)^1 + 6$$

$$42 = 3c_1 + 2c_2 + 6$$

$$\therefore 3c_1 + 2c_2 = 36$$

ومن المعادلتين ينتج :

$$c_1 = 8$$

و $c_2 = 6$

إذن الحل الخاص هو:

$$y_x = 8(3)^x + 6(2)^x + 6$$

وباستخراج بعض القيم الأولى من الحل الخاص نستنتج بأن مسار الحل يفترق نحو $-\infty$ وكما يظهر من القيم الآتية :

$y_0 = 20 , y_1 = 42, y_2 = 102, y_3 = 270 ,.....$ وهكذا

مثال (2) :

جد الحل العام لمعادلة الفروق الآتية :

$$y_{x+1} - 8y_{x+1} - 9y_x = 24$$

ثم جد الحل الخاص إذا كانت

$$y_1 = 0 \, , y_0 = 2$$

الجـواب:

حيث أن $A_1 = -8, A_2 = -9$ إذن نشكل المعادلة المساعدة وهي :

$$m^2 - 8m - 9 = 0$$

ومنها نستخرج :

$$m_1 = \frac{-A_1 + \sqrt{A_1^2 - 4A_2}}{2} = \frac{-1(-8)^2 + \sqrt{(-8)^2} - 4 - 9}{2}$$

$$= \frac{8 + \sqrt{100}}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$m_2 = \frac{8 - 10}{2} = -1$$

إذن بذلك يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو :

$$y_x = c_1 m_1^x + c_2 m_2^x$$

$$= c_1(9)^x + c_2(-1)^x$$

أما الحل العام للمعادلة غير المتجانسة فهو :

$$y_x = \left[c_1 m_1^x + c_2 m_2^x\right] + \frac{K}{1 + A_1 + A_2}$$

$$= c_1(9)^x + c_2(-1)^x + \frac{24}{1 - 8 + 9}$$

$$\therefore y_x = c_1(9)^x + c_2(-1)^x - \frac{3}{2}$$

$$y_0 = c_1(9)^0 + c_2(-1)^0 - \frac{3}{2}$$

$$2 = c_1 + c_2 - \frac{3}{2}$$

و $y_1 = c_1(9)^1 + c_2(-1)^1 - \frac{3}{2}$

$$0 = 9c_1 - c_2 - \frac{3}{2}$$

ومن المعادلتين :

$$c_1 + c_2 = \frac{7}{2}$$

$$9c_1 + c_2 = \frac{3}{2}$$

نحصل على :

$$c_1 = \frac{1}{2}$$

و $c_2 = 3$

إذن الحل الخاص هو:

$$y_x = \frac{1}{2}(9)^x + 3(-1)^x - \frac{3}{2}$$

تمارين (1 - 10)

1- جد الحل العام لمعادلات الفروق الآتية :

أ) $y_{x+2} - 6y_{x+1} + 5y_x = 0$

ب) $y_{x+2} + 3y_{x+1} + 3y_x = 0$

ج) $y_{x+2} + 4y_{x+1} + y_x = 0$

2- جد الحل العام لمعادلات الفروق الآتية ثم جد الحل الخاص استناداً إلى القيم الأولية المبينة إزاء كل منها :

أ) $y_{x+2} - 8y_{x+1} + 12y_x = 18$ س و $y_0 = 2 , y_1 = 0$

ب) $y_{x+2} - 4y_{x+1} - y_x = 12$ و $y_0 = 1, y_1 = 3$

ج) $y_{x+2} - 7y_{x+1} + 6y_x = 4$ و $y_0 = 0, y_1 = 4$

د) $3y_{x+2} - 10y_{x+1} + 6y_x = 15$ و $y_0 = 3, y_1 = 5$

ملحق الفصل الخامس

5-11 الأعداد المركبة

5-11-1 العدد المركب

ذكرنا في الفصل الأول من الجزء الأول من الكتاب في الفقرة (1-1 - i) ، أن الأعداد التي على صورة (ai+b) حيث أن a،b أعدادا حقيقية أما $i = \sqrt{-1}$ هي أعداد مركبة حيث يسمى (a) بالجزء الحقيقي و (bi) الجزء الخيالي. مثال ذلك عند حل المعادلة:

$$x - 2x + 10 = 0$$

بموجب طريقة الدستور هو:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(10)}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{136}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{(36)(-1)}}{2}$$

$$= 1 + 3\sqrt{-1}$$

وهنا يظهر أن صورة العدد المركب $a + bi = 1 + 3\sqrt{-1}$ ومنها نستنتج أن a = 1 وهو العدد حقيقي $bi = 3\sqrt{-1}$ وهو الجزء الخيالي وحيث أن $i = \sqrt{-1}$.

5-11-2 بعض خصائص الأعداد المركبة

أ- جمع العددين المركبين

إذا كان

$$u = a + bi, v = c + di$$

فإن

$$\begin{aligned} u + v &= (a + bi) + (c + di) \\ &= a + bi + c + di \\ &= a + c + (b + d)i \end{aligned}$$

ب- ضرب العددين المركبين

إذا كان

$$u = a + bi, v = c + di$$

فإن

$$\begin{aligned} uv &= (a + bi)(c + di) \\ &= ac + adi + bci + bdi^2 \end{aligned}$$

وحيث أن

$$i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$$

$$\therefore uv = (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad (5-26)$$

ج- مرافق العدد المركب

إذا كان $a + bi$ عدداً فإن العدد المركب $a - bi$ يسمى مرافق للعدد المركب الأول ويكون :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 b^2 \qquad (5-27)$$

د- قسمة العددين المركبين

من النتيجة التي حصلنا عليها في الفقرة (ب) والفقرة (جـ) أعلاه نستطيع أجراء عملية قسمة أي عددين مركبين ولنأخذ المثال الآتي :

$$\frac{2-4i}{5+i}$$

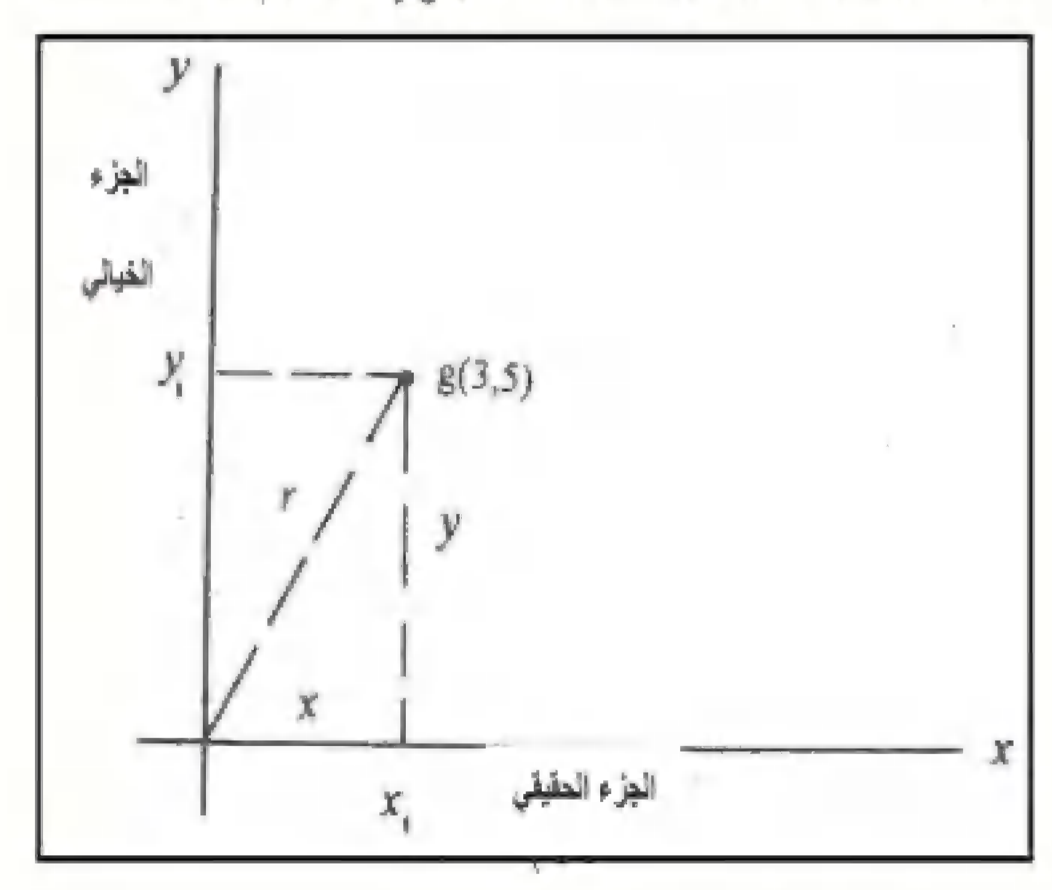
بالضرب في مرافق المقام وهو (5-i) نحصل على :

$$\frac{2-4i}{5+i}=\frac{(2-4i)(5-i)}{(5-i)(5-i)}=\frac{(10-4)+(-2-20)i}{25+1}=\frac{6-22i}{26}$$

5-11-3 تمثيل الأعداد المركبة

يمكن تمثيل العدد المركب $a+bi$ عن طريق الزوج المرتب (a,b) في الإحداثيات المتعامدة على شكل نقط وذلك باعتبار المحور - x ممثلاً للجزء الخيالي من العدد.

فالعدد المركب $3+5i$ يمثل بالنقطة g(3,5) كما موضح في الشكل رقم (5-4) أدناه



والآن إذا انتقلنا من تمثيل $a+bi$ عن طريق الإحداثي العمودي وبالنقطة $g(x,y)$ إلى الإحداثيات القطبية وذلك باعتبار أن طول hg = r

وإذا ما عدنا إلى الفقرة (3-7-5) حيث نظام الإحداثيات القطبية نجد أن :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \quad \text{و} \quad x = r\cos\theta$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \quad \text{و} \quad y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و}$$

وعلى هذا الأساس كتابة العدد المركب :

$$x + yi = r\cos\theta + r\sin\theta i \qquad (5-28)$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

وتسمى r مقياس العدد المركب و θ بسعة $x + yi$ أما

فتسمى بالصيغة القطبية للعدد المركب أو الصيغة المثلثية.

لنأخذ الأمثلة الآتية :

مثال (1) :

ضع العدد المركب الآتي : $4 + 3i$ بالصيغة القطبية :

الجواب :

$$r = \sqrt{(4)^2(3)^2} = 5$$

$$\cos\theta = \frac{4}{5} = 0.8$$

$$\sin\theta = \frac{3}{5} = 0.6 \quad \text{و}$$

ومن الجداول نحصل على قيمة $\theta = 36^\circ$ تقريباً

إذن العدد المركب $4 + 3i = (\cos 36^\circ + i\sin 36^\circ)$

مثـال (2):

ضع العدد المركب $6(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$ بموجب الصيغة $a+bi$

الجـواب:

من الجداول نجد أن :

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 6(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ) = 6(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2})$$

$$= 3\sqrt{3} + 3i$$

5-11-4 جمع الأعداد المركبة بالصيغة القطبية

إذا كان

$$N_1 = a + bi = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

و $$N_2 = c + di = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

فإن :

$$N_1 + N_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) + r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \quad (10-29)$$

5-11-5 ضرب الأعداد المركبة بالصيغة القطبية

إذا كان

$$N_1 = a + bi = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$$

و $$N_2 = c + di = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

فإن :

$$N_1 N_2 = (a + bi)(c + di)$$

و $= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$= r_1 r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + i^2\sin\theta_1\sin\theta_2)$$

وحيث أن : $i^2 = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$ وبإعادة الصياغة ينتج :

$$N_1N_2 = r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\sin\theta_1) + i(\sin\theta_2\cos\theta_1 + \sin\theta_1\cos\theta_2)$$

$$(10-30) \qquad r_1r_2 = \left[(\cos(\theta_1+\theta_2) i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

ويلاحظ أن مقياس حاصل ضرب عددين مركبين يساوي ضرب مقياسي العددين (r_1r_2) وان سعة حاصل الضرب تساوي مجموع سعتي العددين.

وإذا كانت لدينا :

$$N_3 = r_3(\cos\theta_3 + iin\theta_3)$$

فإن :

$$N_1N_2N_3 = r_1r_2r_3\left[[\cos(\theta_1+\theta_2+\theta 3)\right] + i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta 3)]$$

وإذا استمرت عملية الضرب حتى من الأعداد المركبة يكون الناتج :

$$N_1N_2N_3.......N_n = r_1r_2r_3.....r_n\begin{bmatrix}[\cos(\theta_1+\theta_2+\theta 3+....\theta_n)] \\ + i\sin(\theta_1+\theta_2+\theta 3+...\theta_n)\end{bmatrix}$$

وبافتراض أن

$$r = r_1 = r_2 = r_3.......... = r_n$$

وان

$$\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = ... = \theta_n$$

فإن

$$(10-31) \qquad = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \quad \left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^2$$

مثـال:

جد مقياس وسعة العدد المركب كالآتي :

$$\left[2(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right]^4$$

الجـواب:

$$\left[2(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right]^4 = 2^4(\cos\frac{4\pi}{8}+i\sin\frac{4\pi}{8})$$

$$=16(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

وبذلك فإن :

مقياس العدد المركب يساوي : $r^n = 16$

وسعة العدد المركب يساوي: $\theta=\frac{\pi}{2}=90°$

5-11-6 أيجاد الجذور المركبة في معادلات الفروق

بعد أن استعرضنا الأعداد المركبة وخصائصها الرئيسية نناقش بشكل مختصر الحل العام لمعادلة الفروق إذا كان يحتوي على جذور مركبة ولنفترض بان لدينا المعادلة الآتية :

$$y_{x+2}+A_1y_{x+1}+A_2y_x=0 \qquad (5-32)$$

و $y_1=c\,,y_0=b$

وكانت الجذور m_1,m_2 التي تفي بمتطلبات المعادلة المساعدة هي أعداد مركبة وبذلك نستطيع كتابة الحل العام للمعادلة كما يأتي :

$$y=gm_1^x+Lm_2^x \qquad (5-33)$$

(لغرض المتابعة انظر الفقرة 8-5 الحالة الأولى)

افترضنا بان :

$$m_1 = a + bi, m_2 = a - bi$$

إذن :

تكون الصيغة القطبية المبينة في (5-28) كالآتي :

$$a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$a - bi = r(\cos\theta - i\sin\theta) \quad \text{و}$$

حيث أن :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

وتذكر مبرهنة ديمواقر المذكورة في الصيغة (5-31) وهي :

$$\left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

إذن يمكن كتابة الحل العام بالصيغة التالية بعد إحلال x محل n :

$$y_x = g\left[r(\cos\theta + i\sin\theta)\right]^x + L\left[r(\cos\theta - i\sin\theta)\right]^x$$

$$= g\left[r^x(\cos x\theta + i\sin x\theta)\right]^x + L\left[r^x(\cos x\theta - i\sin x\theta)\right]$$

$$= gr^x\cos x\theta + gr^x i\sin x\theta + Lr^x\cos x\theta - Lr^x i\sin x\theta$$

$$(5-34) \qquad y_x = r^x\left[(g = l)\cos x\theta + i(g - L)\sin x\theta\right]$$

والآن نحتاج لشرط مفاده أن (g,L) هما زوجان مترافقان من الأعداد المركبة كي نؤكد بان y_x هو عدد حقيقي. وهذا الشرط يتوفر في ضوء المبرهنة الآتية :

<u>مبرهنة:</u>

إذا كان m_1, m_2 زوجان مترافقان من الأعداد المركبة في المعادلة $y_x = gm_1^x + Lm_2^x$ فإن :

y تكون عدداً حقيقياً إذا كانت gو L ازواجاً مترافقة من الأعداد المركبة ويمكن مراجعة إثبات هذه المبرهنة عند الحاجة في كتاب اكولد بيرج - مدخل إلى معادلات الفروق صفحة (139).

والآن لنعد إلى صيغة الحل العام كما في (5-34) ونفترض أن :

$$g + L = c_1$$

$$i(g - L) = c_2 \quad \text{و}$$

وبذلك تصبح الصيغة (5-34) بالصورة الآتية :

$$y_x = r^x (c_1 \cos\theta x + c_2 \cos\theta x)$$

وهي كما في الصيغة المعطاة في (5-21)

الجزء الثالث

الفصل السادس

معادلات الفروق
والنماذج الاقتصادية



معادلات الفروق والنماذج الاقتصادية

1-6 مقدمة

تستخدم معادلات الفروق في بناء النماذج الاقتصادية المتحركة أي التي تتغير بتغير الوقت أما النماذج التي تستبعد الزمن فهي نماذج ساكنة. ومن النماذج المتحركة ما هو بسيط ويحتوي على معادلات فروق من المرتبة الأولى حيث يظهر المتغير المعتمد كدالة للمتغير نفسه في فترة سابقة. وهناك نماذج تحتوي على معادلات فروق من المرتبة الثانية أي أن المتغير المعتمد يكون دالة للمتغير نفسه خلال الفترتين السابقتين المتعاقبتين. كما تبرز النماذج أشكالاً من العلاقات بين المتغيرات داخل النموذج الواحد. وسنتناول بعض من النماذج المذكورة ونبدأ بالتي تحتوي على معادلات من المرتبة الأولى ومن ثم ننتقل إلى تلك التي تحتوي على معادلات من المرتبة الثانية.

2-6 نموذج العنكبوت **Cobweb Model**

من المواضيع المهمة في دراسة العرض والطلب هو كيفية إجراء التكييف بين الاثنين وفق النموذج الآتي:

العرض: $Q_t = a + bP_{t-1}$ $(6-1)$

الطلب: $P_t = c + dQ_t$ $(6-2)$

حيث أن: $Q_0 = Q_0$ قيمة معروفة عندما $t = 0$

وإن **Q** تمثل الكميات المعروضة والمطلوبة و **P** لسعر و **t** الزمن أما **a,b,c,d** فهي معالم ثابتة، وان:

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

أما $d < 0$ (بسبب تناسب الطلب مع السعر باتجاه عكسي)

ويبين النموذج أن كلاً من Q,P هما دالتان للزمن (t) وبدمج المعادلة الثانية بالأولى ينتج:

$$Q_t = a + b(c + dQ_{t-1})$$

حيث أخذت: $P_{t-1} = c + dQ_{t-1}$ (المعادلة الثانية بفترة تباطؤية واحدة)

وبإعادة الترتيب:

$$\therefore Q_t = a + bc + bdQ_{t-1}$$

ولتسهيل حل النموذج وبما أن a , b , c, d ثوابت نفرض أن:

$$g_1 = bd \;, g_2 = a + bc$$

وبذلك تصبح المعادلة حسب الصيغة الآتية:

$$Q_t = g_1 Q_{t-1} + g_2$$

أو $Q_{t-1} = g_1 Q_t + g_2$

وإن حل المعادلة هذه يتم وفق الطريقة المذكورة في (5-9) وكما يأتي:

إذا كانت $g_1 \neq 1$ فإن الحل العام يكون:

$$Q_t = g_1^t Q_0 + g_2 \left(\frac{1 - g_1^t}{1 - g_1}\right)$$

أما إذا كانت g = 1 فإن الحل العام يكون حسب الصيغة (5-10)

$$Q_t = Q_0 + g_2 t$$

وحيث أن $g_1 = bd \;, g_2 = a + bc$

لذا يكون الحل العام للصيغة هو:

إما $Q_t = (bd)^t Q_0 + (a + bc)\dfrac{1 - (bd)^t}{1 - bd}$

أو $Q_t = Q_0 + (a + bc)t$

وما يهمنا معرفته هو سلوكية مسار الحل. فما دام $b > 0$, $d < 0$ فإن حاصل ضربهما يساوي $bd < 0$ ولهذا فإن سلوك مسار الحل هو دائماً متذبذب. والآن نذهب لتحديد نقطة التوازن (P^*, Q^*) والصيغة (16-5) تعطينا قيمة التوازن:

$$Q^* = \frac{g_2}{1 - g_1} = \frac{a + bc}{1 - bd}$$

أما قيمة التوازن P^* فتتطلب حل النموذج بتعويض المعادلة الأولى بالثانية لينتج:

$$P_{t+1} = c + ad + bdP_t$$

ويكون الحل العام:

$$P_t = (bd)^t P_0 + (c + ad)(\frac{1 - (bd)^t}{1 - bd})$$

ومنه نحصل على:

$$p^* = \frac{g_2}{1 - g_1}, \frac{a - bc}{1 - bd}$$

الفصل السادس

وإن نقطة التوازن:

$$(P^*, Q^*) = \left(\frac{c + ad}{1 - bd}, \frac{a - bc}{1 - bd} \right) \qquad (6\text{-}3)$$

ومادامت $bd < 0$ فإن السلوكيات الآتية تظهر في المسار الزمني:

إذا كانت $-1 < bd < 0$ فإن المسار P_t, Q_t يقترب من نقطة التوازن بتذبذب متضائل أي الحالة (6) من الجدول (1-5).

إذا كانت $b\,d = 1$ فإن المسار يفترق بتذبذب محدود كما في الحالة (7) من الجدول.

أما إذا كانت $bd < -1$ فإن المسار يفترق بتذبذب غير محدود كما تشير الحالة (8) من الجدول.

ولهذا لا يكون هناك توازن مستقر إلا إذا كانت $-1 < bd < 0$

11-3 نموذج هارود Harrod Model

يعتبر هذا النموذج من النماذج الاقتصادية الكلية التي تتحدث عن تحليلات الدخل الوطني والنمو الاقتصادي وتتكون معادلاته كما وصفها هارود* من الآتي:

$$S_t = \alpha y_t$$

$$I_t = \beta(y_t - y_{t-1})$$

$$S_t = I_t$$

$$y_0 = y_0$$

قيمة معرفة عند $(t = 0)$

حيث أن s يمثل الادخار و y تمثل الدخل و I الاستثمار وكل من هذه المتغيرات هو دالة للزمن t

وبدمج المعادلات الثلاثة ينتج:

$$\alpha y_t = \beta(y_t - y_{t-1})$$

وبإعادة الصياغة نحصل على:

$$\beta y_{t-1} = \beta y_t - \alpha y_t$$

$$= y_t(\beta - \alpha)$$

$$\therefore y_t = (\frac{\beta}{\beta - \alpha}) y_{t-1}$$

ويكون الحل العام حسب الصيغة (5-9) وهي:

$$y_x = A^x y_0 + B\frac{1 - A^x}{1 - A}$$

حيث أن:

(*) هارود (Roy F.Harrod) اقتصادي انكليزي ولد عام (1900) من ابرز إنتاجه كانت عن الاقتصاد المتحرك والدورة التجارية وتفاعل المعجل والمضاعف ونحو سياسة اقتصادية جديدة ومواضيع أخرى ومن أهم هذه الكتابات هو نموذج مبسط للنمو الاقتصادي الذي وضعه بمعزل عن دومار ولكن جاء النموذجان متشابهان ولهذا سمي باسميهما.

$$A=\frac{\beta}{\beta-\alpha} \quad ,B=0$$

فبعد إحلال t محل x يكون الحل العام كالآتي:

$$y_t=(\frac{\beta}{\beta-\alpha})^t y_0+(0)\left(\frac{1-A^t}{1-A}\right)$$

$$=(\frac{\beta}{\beta-\alpha})^t y_0$$

وبما أن:

$$I_t=S_t=\alpha y_t$$

$$\therefore I_t=S_t=\alpha(\frac{\beta}{\beta-\alpha})^t y_0$$

وبما أن الدخل يفترض به أن يكون موجباً أي $y_t>0$ فإن سلوك المسار الزمني للحل يعتمد على قيمة $(\frac{\beta}{\beta-\alpha})$، أما إذا كان y غير سالب فإن:

$\frac{\beta}{\beta-\alpha}\geq 0$ وحيث يشترط النموذج أن $\alpha>0,\beta>0$ ولهذا فإن:

$\frac{\beta}{\beta-\alpha}>1$ وحيث أن $y^*=\frac{\beta}{1-A}$ من العلاقة (10-12) وكما ذكرنا أعلاه فإن

$A=\frac{\beta}{\beta-\alpha}\ ,B=0$ لهذا فإن:

$$y^*=\frac{0}{\frac{\beta}{\beta-\alpha}}=0$$

ومن ملاحظة الجدول (5-1) والنتائج أعلاه يتبين المسار الزمني (yt) يتزايد باضطراد ويفترق باتجاه ∞+ أي الحالة رقم (2) من الجدول (5-1) أعلاه. ومادامت

$0 > \infty$. فإن المسار It والمسار se هما أيضاً يتزايدا باضطراد ويفترقا نحو $\infty +$ وبذلك يتضح بأنه لا قيم توازنيه لأي متغير في هذا النموذج.

6-4 نموذج الاستهلاك Consumption Model

يفترض هذا النموذج أن الدخل الوطني يتوزع بين الاستهلاك والادخار في اقتصاد مغلق لا توجد فيه تجارة خارجية كما يفترض النموذج أن الاستهلاك دالة الدخل وأن الدخل دالة للادخار. وحيث أن النموذج هو نموذج متحرك يعتمد على مسار الزمن فإن كل من الاستهلاك والادخار والدخل هي في النهاية دوال للزمن (t) ويبدو النموذج بشكله البسيط كالآتي:

$$C_t + S_t = y \quad (1)$$

$$y_t = \alpha S_{t-1} \quad (2)$$

$$C_t = \beta y_t \quad (3)$$

$y_0 = y_0$ قيمة معروفة عندما t = 0

حيث أن β هو الميل الحدي للاستهلاك و α معلمة ثابتة. وعند تعويض المعادلة(2) والمعادلة (3) في المعادلة (1) بعد أعادة كتابة المعادلة الثانية كالآتي:

$S_t = \dfrac{y_{t+1}}{\alpha}$ و $y_{t+1} = \alpha S_t$ ينتج:

$$\beta y_t + \frac{y_{t+1}}{\alpha} = y_t$$

وبإعادة الصياغة:

$$\beta \alpha y_t + y_{t+1} = \alpha y_t$$

$$\therefore y_{t+1} = \alpha y_t - \beta \alpha y_t$$

$$y_{t+1} = \alpha(1-\beta) y_t$$

ويكون الحل العام حسب الصيغة (5-9) كالأتي:

$$y_t = (\alpha - \alpha\beta)^t y_0 \quad (4)$$

وبتعويض ذلك في معادلة الاستهلاك (3) أعلاه نحصل على:

$$C_t = \beta(\alpha - \alpha\beta)^t y_0 \quad (5)$$

وحيث نستنتج من المعادلة (3) بأن:

$$C_0 = \beta y_0 \quad (6)$$

وبتعويض العلاقة (6) في المعادلة (5) ينتج:

$$C_t = (\alpha - \alpha\beta)^t C_0 \quad (7)$$

أما الادخار St فيعالج كالآتي:

من المعادلة (1) لدينا:

$$S_t = y_t - C_t \quad (8)$$

وبتعويض المعادلتين (4) و(5) في المعادلة (8) ينتج:

$$S_t = (\alpha - \alpha\beta)^t y_0 - \beta(\alpha - \alpha\beta)^t y_0$$

وبإعادة الصياغة نحصل على:

$$S_t = (1 - \beta)(\alpha - \alpha\beta)^t y_0 \quad (9)$$

ومن المعادلة (1) لدينا:

$$S_0 = y_0 - c_0$$

وبتعويض المعادلة (6) في المعادلة أعلاه ينتج:

$$S_0 = y_0 - \beta y_0$$

$$S_0 = (1 - \beta) y_0$$

أو

$$y_0 = \frac{S_0}{(1 - \beta)}$$

وبتعويض ذلك في المعادلة (9) ينتج:

$$S_t = (1-\beta)(\alpha-\alpha\beta)^t \frac{S_0}{(1-\beta)} \quad (10)$$

$$\therefore S_t = (\alpha-\alpha\beta)^t S_0$$

وبذلك يكون حل النموذج برمته مكون من المعادلات (4) و (7) و (10) وكما يأتي:

$$y_t = (\alpha-\alpha\beta)^t y_0$$

$$c_t = (\alpha-\alpha\beta)^t C_0$$

$$s_t = (\alpha-\alpha\beta)^t S_o$$

أما المسار الزمني فيأخذ الحالات التالية كما مؤشر في الجدول (5-1):

إذا كانت $\alpha-\alpha\beta > 1$ تزايد باضطراد وافتراق نحو $+\infty$ الحالة (2) من الجدول.

إذا كانت $0 < \alpha-\alpha\beta < 1$ تناقص باضطراد وتقارب نحو y^* الحالة (4) من الجدول.

إذا كانت $\alpha-\alpha\beta = 1$ ثابت كما في الحالة (9) من الجدول.

6-5 نموذج الدخل - الاستهلاك - الاستثمار
Income – Consumption – Investment Model

تناولنا في الفصل الرابع الفقرة (4-6) نموذج الدخل - الاستهلاك - الاستثمار وكانت الزمن (t) مستمراً في النموذج ولكن عندما يصبح الزمن متقطع يتحول النموذج إلى معادلات فروق بعد أن كان معادلات تفاضلية وذلك كما مبين أدناه:

$$C_t = \alpha y_t + \beta \quad (1)$$

$$I_t = e y_1 + d \quad (2)$$

$$\Delta y_{t-1} = \lambda\left[c_{t-1} + I_{t-1} - y_{t-1}\right] \quad (3)$$

قيمته معلومة في بداية الفترة عندما t = 0 $y_0 = y_0$

$0 < \alpha > 0, e > 0, \lambda > 0$ وقبل حل هذا النموذج نعيد صياغته كما مبين أدناه:

$$\Delta y_{t-1} = y_t - y_{t-1}$$

وبالتعويض ذلك في المعادلة (3) ينتج:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda[C_{t-1} + I_{t-1} - y_{t-1}]$$

$$y_t = \lambda[C_{t-1} + I_{t-1}] - \lambda y_{t-1} + y_{t-1}$$

$$y_t = \lambda[C_{t-1} + I_{t-1}] + (1-\lambda)y_{t-1} \quad (4)$$

وبتعويض المعادلتين (1)، (2) في المعادلة (4) بعد وضعها بصيغة تباطؤية واحدة أي:

$$C_{t-1} = \alpha Y_{t-1} + B$$

$$I_{t-1} = eY_{t-1} + d$$

نحصل على:

$$Y_t = \lambda[\alpha Y_{t-1} + B + eY_{t-1} + d] + (1-\lambda)Y_{t-1}$$

$$= \lambda(\alpha Y_{t-1} + eY_{t-1}) + (1-\lambda)Y_{t-1} + \lambda(B+d)$$

$$= \lambda(\alpha + e)Y_{t-1} + (1-\lambda)Y_{t-1} + \lambda(B+d)$$

$$= [\lambda(\alpha + e) + (1-\lambda)]Y_{t-1} + \lambda(B+d) \quad (5)$$

ولغرض استخراج الحل العام نتذكر الصيغة (5-9) لحل معادلة الفروق الخطية من المرتبة الأولى ذات المعاملات الثابتة حيث تشير الصيغة (5-9) إلى أن الحل هو:

$$Y_s = A^s Y_0 + B\left(\frac{1-A^s}{1-A}\right)$$

ونحصل على الحل العام للمعادلة (5) كما يلي:

$$Y_0 = [\lambda(\alpha+e)+(1-\lambda)]^t Y_0 + \lambda(B+d)\frac{1-[\lambda(\alpha+d)+(1-\lambda)]^t}{1-[\lambda(\alpha+d)+(1-\lambda)]} \quad (6)$$

وهذا النموذج يكون مستقراً إذا توفرت الشروط الآتية:

$-1 < \lambda(\alpha+d)+(1-\lambda) < 1$ الحالة (6 , 5) في الجدول (5-1)

$$-\frac{1}{\lambda} < \alpha + d + \frac{1}{\lambda} - 1 < \frac{1}{\lambda}$$

$$1 - \frac{2}{\lambda} < \alpha + d < 1$$

ولكن ما دامت $\alpha + d > 0$ من تعرف النموذج، ومن نتائج التطبيق يتضح أن $\lambda < 2$ وذلك لان الاستجابة لحالة عدم توازن العرض والطلب لا يحتمل أن ينتج عنها تغيراً في العرض مساوياً مرتين حجم التناقص الموجود.

ولهذا فإن حالة الاستقرار تحصل عندما $\alpha + d < 1$ كما لاحظنا ذاك في النموذج عندما كان بصيغة المعادلة التفاضلية.

6-6 نموذج متزلر في المخزون Metzler Inventory Model

يتعرض هذا النموذج الذي وضعة (متزلر) لدورة الخزين ويتكون من معادلات الفروق الآتية:

$$Y_t = U_t + S_t + V_0 \quad (1)$$

$$U_t = \beta Y_{t-1} \quad (2)$$

$$S_t = \beta(Y_{t-1} + Y_{t-2}) \quad (3)$$

$$0 < \beta < 1$$

حيث أن Y_t هو الدخل المنتج في الفترة t , U_t هو سلع الاستهلاك المنتجة

لأغراض البيع في الفترة t ، S_t هو سلع الاستهلاك المنتجة لأغراض الخزن في الفترة t ، V_0 فهو صافي الاستثمار المستقل الثابت في كل فترة.

ويظهر من النموذج أن مجموع الدخل المنتج خلال أية فترة هو مجموع سلع الاستهلاك مضافا إليه صافي الاستثمار. كما يشير النموذج إلى أن السلع المنتجة خلال أية فترة هي نسبة من الدخل المنتج في الفترة السابقة. أما الإنتاج المعد للخزن فيساوي الفرق بين السلع المعدة للبيع فعلا وتلك المتوقعة في الفترة السابقة وهذا يعني أن النموذج يحاول أن يبقي المخزون في مستوى ثابت. ويفترض أيضا أن المخزون كاف لمواجهة الفروقات بين الإنتاج والطلب الاستهلاكي.

والآن وقبل حل النموذج نقوم بإعادة ترتيب المعادلات وكما يأتي:

نعوض المعادلتين (2) و(3) في المعادلة (1) فنحصل على:

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + \beta(Y_{t-1} - Y_{t-2}) + V_0 \quad (4)$$

$$Y_t - 2\beta Y_{t-1} + \beta Y_{t-2} = V_0 \quad (5)$$

الفصل السادس

ودون المساس بهيكل المعادلة الأخيرة يمكن تغير بداية الفترة t لتبدأ من $t = 0$ فينتج:

$$Y_{t+2} - 2\beta Y_{t+1} + \beta Y_t = V_0 \quad (6)$$

والمعادلة (6) هي معادلة فروق خطية غير متجانسة ولحلها نتبع الخطوات المذكورة في الفترة (5-10) في الفصل العاشر وكما يأتي:

نفترض أن المعادلة أعلاه متجانسة كمرحلة أولى وذلك بافتراض أن:

$V_0 = C$ (أي ثابت)

فتكون المعادلة المساعدة كالآتي:

$$M^2 - 2\beta M + \beta = 0$$

$$M_1 = \frac{2\beta + \sqrt{4\beta^2 + 4\beta}}{2} = \frac{2\beta + 2\sqrt{\beta^2 + \beta}}{2} = \beta + \sqrt{\beta^2 + \beta}$$

$$M_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 + \beta}$$

وحيث أن النموذج يشترط أن $0 < B < 1$ مما يقتضي:

$$\beta^2 - \beta < 0$$

وبذلك يتضح أن الجذور هي إعداد مركبة كما مبين أدناه:

$$M_1 = \beta + \sqrt{(-1)(\beta - \beta^2)} = \beta + \sqrt{-1}\sqrt{\beta(1-\beta)}$$

$$\therefore \quad M_1 = \beta + i\sqrt{\beta(1-\beta)}$$

$$M_2 = \beta - i\sqrt{\beta(1-\beta)}$$

ولغرض استخراج r يلاحظ أن $a = \beta$ و $b = \sqrt{\beta(1-\beta)}$

والآن نستطيع استخراج: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ الواردة في المعادلة (5-21) كي نحصل على:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\beta^2 + \beta(1-\beta)}$$

$$\therefore \quad r = \sqrt{\beta^2 - \beta^2 + \beta} = \sqrt{\beta} \quad (7)$$

و

$$\cos\theta = \frac{\beta}{r} = \frac{\beta}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\beta}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{\beta(1-\beta)}}{r} = \frac{\sqrt{\beta}\sqrt{1-\beta}}{r} = \sqrt{1-\beta}$$

وبهذا يكون حل معادلة الفروق المتجانسة:

$$Y_{t+2} - 2\beta Y_{t+1} + \beta Y_t = V_0$$

هو حسب الصيغة (5-21) الآتية:

$$Y_x = r^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

الجزء الثالث

وبعد إحلال t محل x وكالاتي:

$$Y_t = (\sqrt{\beta})^t (C_1 \cos X + C_2 \sin X) \quad (8)$$

والآن ننتقل إلى الحل العام لمعادلة الفروق غير المتجانسة ونتذكر الصيغة (5-22) التي تقول أن الحل العام يتكون من الحل العام للمعادلة المتجانسة مضافا إليه ثابت معين كما مبين أدناه:

$$Y_x = Z_x + L$$

حيث أن Z_x هو الحل العام للمعادلة المتجانسة كما هو في (8) و L كما ورد في الصيغة (5-24) يساوي:

$$L = \frac{K}{1 + A_1 + A_2}$$

وحيث أن K هنا تساوي V_0 وقيمة A_1 , A_2 تؤخذ من المعادلة (6) أي أن:

$$A_1 = -2\beta \quad , \quad A_2 = \beta$$

ومن ذلك نحصل على قيمة L لتساوي:

$$L = \frac{V_0}{1 - 2\beta + \beta} = \frac{V_0}{1 - \beta}$$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة غير المتجانسة هو:

$$(6\text{-}4) \quad Y_t = (\sqrt{\beta})^t (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{V_0}{1 - \beta}$$

ويؤدي الحدان اللذان يحتويان على الجيب تمام (cos) والجيب (sin) إلى تقلبات دورية بسبب تذبذب هذين الحدين بين القيمة الموجبة والقيمة السالبة إلا أن هذه التقلبات يتم إخمادها (أي إنها تتضاءل) عن طريق العامل ($(\sqrt{\beta})^t$) ما دام ($0 < B < 1$) ولهذا فإن:

$$(\sqrt{\beta})^t (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \to 0$$

عندما $t \to \infty$ لان $\left(\sqrt{\beta}\right)^t \to 0$ للأسباب أعلاه:

وكذلك:

$$Y_t \to \frac{V_0}{1-\beta} \quad \text{عندما} \quad t \to \infty$$

وهي القيمة التي تؤدي إلى التوازن.

7-6 نموذج ساملسن في تفاعل المضاعف والمعجل Samuelson's Multiplier Accelerator Interaction Model

يعرف هذا النموذج بنموذج التفاعل والذي يوضح عملية تحديد الدخل الوطني عندما يتفاعل مبدأ المعجل مع المضاعف، ويشير النموذج إلى فرضيات عدة هي:

أن الدخل الوطني (Y) يتكون من ثلاثة مفردات أساسية هي الإنفاق النفقات الاستهلاكي C_t، والإنفاق الاستثماري I_t،والأنفاق الحكومي G_t.

كما يفترض النموذج كون الاستهلاك دالة للدخل في الفترة السابقة أي أن C_t هو نسبة من Y_{t-1} أما بالنسبة للاستثمار I_t فهو الاستثمار (غير التلقائي) والناجم عن كونه دالة للنزعة السائدة للإنفاق الاستهلاكي والتي يتضمنها مبدأ المعجل وتدخل في النموذج. وبعبارة أخرى يفترض النموذج أن الاستثمار هو نسبة ثابتة من الزيادة في الاستهلاك بين الفترة الحالية والفترة السابقة. أما المفردة الثالثة فهي الإنفاق الحكومي (G_t) والذي يؤخذ على أساس كونه متغير خارجي أي انه ثابت من فترة لأخرى ويرمز له بالرمز (G_0) وتقدر قيمته: $G_0 = 1$

إن الافتراضات أعلاه يمكن وضعها في صيغة المعادلات الآتية:

$$Y_t = C_t + I_t + G_0 \quad (1)$$

$$C_t = \alpha Y_{t-1} \quad (2)$$

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}) \quad (3)$$

$$Y_0 = Y_0$$

$$Y_1 = Y_1$$

$$\alpha > 0 \ , \quad \beta > 0$$

والآن دعنا نستخرج الحل العام للنموذج:

نعوض المعادلتين الثانية (2) والثالثة (3) في المعادلة الأولى (1) لنحصل على معادلة متجانسة لكون G_0 ثابت:

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta(\alpha y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}) + G_0$$

$$Y_t - \alpha Y_{t-1} - \alpha\beta Y_{t-1} + \alpha\beta Y_{t-2} - G_0 = 0$$

$$\therefore y_t - \alpha(1+\beta)y_{t-1} + \alpha\beta y_{t-2} - G_0 = 0 \quad (4)$$

ويعتمد الحل العام لمعادلة الفروق المتجانسة (4) على طبيعة جذور المعادلة المساعدة ودعنا نتذكر الفقرة (5-8) من الفصل العاشر التي تبين الحالات الثلاثة المذكورة:

أولاً:

إذا كانت $M_1 \ , \ M_2$ حقيقية وغير متساوية أي $M_1 \neq M_2$ يكون حل المعادلة كما في (5-19) هو: الفصل السادس

$$Y_t = C_1 M_1^t + C_2 M_2^t \quad (5)$$

لاحظ أن $C_1 \ , \ C_2$ هنا ثوابت المعادلة المساعدة وليس الاستهلاك وفي الحالة الأولى أعلاه تكون كل من $M_1 \ , \ M_2$ كما يلي (انظر المعادلة 4):

$$M_1 = \frac{-A + \sqrt{A_1^2 + 4A_2}}{2}$$

$$M_1 = \frac{\alpha(1+\beta) + \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$$

أما:

$$M_2 = \frac{\alpha(1+\beta) - \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2}$$

ثانياً:

إذا كانت M_2 , M_1 حقيقية ومتساوية $M_1 = M_2 = M$ يكون الحل:

$$Y_t = C_1 M^t + C_2 t M^t \quad (6)$$

حيث أن قيمة M هنا تساوي:

$$M = \frac{\alpha(1-\beta)}{2}$$

وهذا لا يتحقق إلا عندما يكون:

$$\frac{\sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{2} = 0$$

في كل من المعادلتين M_2 , M_1 أعلاه انظر المثال (2) الوارد في الفقرة (5-8) لمزيد من التفاصيل.

الجزء الثالث

ثالثاً:

إذا كانت كل من M_2 , M_1 مركبة فيكون الحل:

$$Y_t = r^t(C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t)$$

حيث أن:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$= \sqrt{\alpha\beta}$$

لكون:

$a = \alpha(1+\beta)$ و $b = \sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}$

أما قيمة $\cos \theta$, $\sin \theta$ فهي:

$$\sin \theta = \frac{a}{r} = \frac{\alpha(1-\beta)}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{\alpha^2(1+\beta)^2 - 4\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= [1 - \frac{\alpha(1+\beta)}{4\beta}]^{1/2}$$

والآن ننتقل إلى حل المعادلة غير المتجانسة (4) وكما مبين:

حيث أن:

$$L = \frac{K}{1 + A_1 + A_2}$$ راجع الصيغة (5-24)

$A_1 = \alpha(1-\beta)$ و $A_2 = \alpha\beta$ و $K = G_0$

$$\therefore \quad L = \frac{G_0}{1 - \alpha(1-\beta) + \alpha\beta}$$

$$= \frac{G_0}{1-\alpha}$$

وبذلك يكون حل المعادلة غير المتجانسة بالصيغ الثلاث المذكورة أعلاه هو:

أولاً:

$$Y_t = C_1 M_1^t + C_2 M_2^t = \frac{G_0}{1-\alpha}$$

ثانيا:

$$Y_t = C_1 M_1^t + C_2 t M_2^t + \frac{G_0}{1-\alpha}$$

ثالثا:

$$Y_t = r^t (C_1 \cos \theta t + C_2 \sin \theta t) + \frac{G_0}{1-\alpha}$$

ونشير إلى أن قيم كل من: r ، M_2 ، M_1 قد مر استخراجها في أعلاه أما الثوابت فيمكن تحديدها عن طريق الشروط الأولية Y_t ، Y_0.

والآن أين الحل الذي يحقق التوازن:

إن حل التوازن هو:

$$Y^* = \frac{G_0}{1-\alpha}$$

وعند ملاحظة الحلول أعلاه نجد أن هذا الحل لا يحصل إلا عندما تتجه قيمة الحدين الأولين في الحلول الثلاثة أعلاه إلى الصفر. كما تجدر الإشارة إلى انه يمكن الاستعاضة بـ ($\frac{1}{1-\alpha} = \frac{G_0}{1-\alpha}$) في الحلول أعلاه لأننا افترضنا منذ البداية أن $G_0 = 1$

تمارين (6-1)

1- النموذج الآتي يتعلق بنمو الدخل الوطني. جد الحل العام له:

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$C_t = \alpha + \beta Y_t$$

$$Y_{t+1} - Y_t = \gamma \alpha I_t$$

$$Y_0 = Y_0 \quad , \quad C_0 = C_0 \quad , \quad I_0 = I_0$$

$$\alpha \geq 0 \quad , \quad 0 < \beta < 1 \quad , \quad \gamma > 0$$

حيث أن Y يمثل الدخل الوطني وC الاستهلاك و I الاستثمار.

2- النموذج التالي لهارود في الدخل الوطني حل النموذج وبين المسار الزمني له.

$$S_t = \alpha y_t + \beta$$

$$I_t = e(y_t - y_{t-1})$$

$$S = mI_t$$

$$Y_0 = Y_0$$

$$\alpha > 0 \;,\; \beta > 0 \;,\; e > 0 \;,\; m > 0$$

حيث أن S يمثل الادخار و Y الدخل الوطني و I الاستثمار.

3- حل النموذج الآتي وبين سلوكية الحل:

$$C_t = \alpha Y_{t-1} + \beta$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$I_t = \gamma Y_t$$

$$0 < \alpha < 1 \;,\; 0 < \gamma < 1 \;,\; \beta > 0$$

وان C يمثل الاستهلاك و Y الخل الوطني وI تمثل الاستثمار.

4- خذ نموذج ساملسن:

$$Y_t = C_t + I_t + G_0$$

$$C_t = \beta Y_{t-1}$$

$$I_t = \alpha(C_t - C_{t-1})$$

$$Y_0 = Y_0 \;,\; Y_1 = Y_1$$

$$\beta > 0 \;,\; \alpha > 0$$

حل النموذج أعلاه إذا كانت:

$$\beta = 0.9$$

$$\alpha = 0.4$$

ثم بين سلوكية المسار الزمني للحل.

الفصل السابع

البرمجة غير الخطية

Nonlinear Programming



البرمجة غير الخطية

Nonlinear Programming

1-7 المقدمة

ذكرنا في الفصل الأول من الجزء الأول من الكتاب أن كثير من العلاقات الاقتصادية تأخذ صيغة خطية مثل q = 80-2p والتي تشير إلى أن الكميات المطلوبة هي دالة عكسية خطية للسعر. ولكن هناك علاقات تأخذ صيغة غير خطي مثل $q = 5 - 2p^{2/5}$. وقد أوضحنا بأن دوالاً من هذا النوع قد تكون خطية حرة لا قيود عليها كقيود الميزانية والدخل وغيرها. أو قد تكون مقيدة بشروط معينة وتسمى بالدوال غير الخطية أو البرامج الغير خطية (Non linear Programming) وتسمى اختصاراً (NLP) قد شرحنا بعضا منها في الفصل الخامس من هذا الجزء و التي كانت من النوع البسيط غير المعقد. وقد وضعت عدة طرق لحل هذه البرامج ومنها ما يستند على طرق حل البرامج الخطية الذي سبق وأن شرحت مفصلاً في الجزء الأول. وسنتطرق بإيجاز إلى طرق حل البرامج غير الخطية بالقدر الذي يسمح به مستوى هذا الكتاب.

الفصل السابع

2-7 أنواع البرمجة غير الخطية The Kinds of NLP

تقسم البرامج غير الخطية إلى:

أ- البرامج غير المقيدة Unconstrained NLP

تشير البرامج غير المقيدة إلى إنها البرامج التي تتبدل فيها المتغيرات في دالة الهدف دون أي شروط أو محددات فالدالة:

$$Z = 2x_1^2 + x_2 + X_3^4$$

هي برنامج فية دالة هدف فقط: $z = f(x)$ دون أن تكون هناك أية محددات على للمتغيرات (x_1 , x_2 , x_3)

ب- البرامج المقيدة Constrained of NLP

أما البرامج المقيدة فهي التي تتضمن محددات على التبدلات التي تحدث في المتغيرات الواردة فيها كان نقول بالنسبة للدالة أعلاه إنها برنامج تعظيم (z):

$$Z = 2x_1^2 + x_2 + x_3^4$$

وإن تعظيم (z) يصطدم بمحددات الموارد مثلا فنقول أن:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_3 \leq 8$$

بالإضافة إلى شروط عدم السلبية التي تفترضها التحليلات الاقتصادية حيث لا معنى لهذه القيم إذا كانت سالبة فتضاف المحددات الآتية:

$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

ج- البرامج التربيعي Quadratic Programming

وهي البرامج التي تكون فيها دالة الهدف من الدرجة الثانية ومثقلة بمحددات متباينة خطية مثل:

$$z = x_1^2 + 2x_2 + x_3^2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 8$$

3-7 حل البرامج غير الخطية Solution of NLP

يحل البرنامج غير الخطي وذلك بإيجاد قيم المتغيرات التي ترد في البرنامج والتي تؤدي إلى تعظيم أو تقليل دالة الهدف وحيث أن البامج غير الخطية على أنواع كما ذكرنا سلفا فقد تعددت طرق حل هذه البرامج وسنحاول استعراض هذه الطرق باختصار وبالقدر الذي يسمح به مستوى الكتاب كما نوهنا سلفاً.

12-4 حل البرامج غير الخطية غير المقيدة Solution of UNLP

يحل البرنامج غير الخطي وغير المقيد (UNLP) بطرق عدة منها:

7-4-1 حل البرامج غير المقيدة ذات المتغيرين

ويمكن أن نتناول من طرق حلها طريقتين هما:

طريقة نيوتن رافسن (Newton - (Raphson Method (NRM

تحتاج هذه الطريقة لاستخراج المشتقة الأولى والثانية للدالة $f(x)$ أي استخراج $f'(x)$، $f''(x)$. وكنا قد تطرقنا إلى طرق استخراج النهاية الصغرى أو العظمى للدالة عن طريق استخراج هاتين المشتقتين (راجع الفقرة 4-5 من الكتاب) ولكن بدلاً من جعل $f'(x) = 0$ حيث تكون كذلك عند نهاياتها المتطرفة ومن ثم الاستعانة بـ $f''(x)$ لمعرفة فيما إذا كانت نهاية عظمى أو صغرى فان طريقة (NRM) تعتمد هنا الأسلوب الرقمي وعلى المشتقتين لاستخراج هذه النهاية. وتلخص هذه الطريقة بالخطوات الآتية:

الفصل السابع

1- نبدأ الحل بتقدير حسن لقيمة x_0, x^* أي تحاول أن تقدر قيمة جيدة للمتغير x الذي يجعل الدالة في حالتها المثلى (أعظم أو اقل) وهذه القيمة رمزنا لها بـ x^* ولكن سنبدأ بها الحل أي نطلق منها باسم x_0. وكلما كان تقديرنا جيدا سنبلغ الحل الأمثل بسرعة.

2- تتبع القاعدة الآتية في البحث عن قيمة x^* الحقيقية وليست المقدرة:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}, \qquad i = 0,1,2,... \tag{7-1}$$

$$f''(x_i) \neq 0$$

3- نتوقف عندما نصل إلى القيمة التي تفي بمتطلبات الحل وهي بلوغ القيمة العظمى أو الصغرى للدالة f (x) قد يكون الأمر غامضاً لهذا دعنا نأخذ مثالاً إيضاحياً.

مثال (1):

حل المسالة الآتية:

$$\min Z = 3x^2 + x + 5$$

الجواب:

نجد أولاً:

$$f'(x) = 6x + 1$$

و

$$f''(x) = 6$$

والآن نأخذ قاعدة البحث عن قيمة x^* وهي:

$$X_i + 1 = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)} \quad ,i = o,1,2,...$$

نبدأ بـ $I = 0$ ونقدر قيمة معينة لـ x_0 قريبه من x^* ولتكن $x_0 = 2$ فنحصل على:

المحاولة الأول: $x_1 = 2 - \frac{6(2)+1}{6} = 2 - \frac{13}{6} = -\frac{1}{6}$

المحاولة الثانية: $x_2 = -\frac{1}{6} - \frac{6(-\frac{1}{6})+1}{6} = -\frac{1}{6} + 0 = -\frac{1}{6}$

إذن نتوقف حيث لا تحسن في المحاولة الثانية وبذلك نكون قد بلغنا الحل الأمثل في الجولة الأولى

حيث تكون قيمة $x = -\frac{1}{6}$ وتكون قيمة (z) كالآتي:

$$Z = 3(-\frac{1}{6})^2 - \frac{1}{6} + 5$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + 5$$

$$= \frac{59}{12}$$

الجزء الثالث

مثال (2):

حل المسالة الآتية:

$$\max f(x) = 8x - x^2$$

الجواب

نجد أولاً:

$$f'(x) = 8 - 2x \quad , f''(x) = 2$$

نبدأ بـ $x_0 = 2$ فنحصل على:

$$x_1 = 2 + \frac{8 - 2(2)}{2} = 2 + 2 = 4$$

$$x_2 = 4 + \frac{8 - 2(4)}{2} = 4 - 0 = 4$$

إذن الحل الأمثل هو عندما x=4

مثال (3)

حل المسالة الآتية:

$$\min f(x) = Z = x^3 - 6x + 7$$

الجواب

نستخرج أولاً:

$$f'(x) = 3x^2 - 6 \ , \ f''(x) = 6x$$

ونختار $x_0 = 1$ لنبدأ بها فنحصل على:

$$x_1 = 1 - \frac{3(1)^2 - 6}{6(1)} = 1 - \frac{-3}{6} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{3}{2} - \frac{3\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6}{6\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{3}{2} - \frac{\frac{27}{4} - \frac{24}{4}}{9} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12}$$

$$x_2 = \frac{17}{12} - \frac{3\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 6}{6\left(\frac{17}{12}\right)} = \frac{17}{12} - \frac{1}{408} = \frac{577}{408} = 1.414$$

وقد نكتفي في الخطوة الثالثة لان هناك تحسن ضئيل وإذا ما واصلنا الحل فسنحصل على تحسن ضئيل جداً مع تعقد العمليات الحسابية ولهذا فإن:

الحل الأمثل هو عندما $X = \frac{577}{408}$

$$Z = 2.83 - 8.48 = 1.35$$

طريقة ريكولا فالسي **(The Regula Falsi Method RFM)**

وهي طريقة مشابهة لطريقة (NRM) ولكنها لا تتطلب استخدام المشتقة الثانية أو ضرورة وجودها. وتتضمن الخطوات الآتية:

نبدأ باختيار حسن لكل من (x^*, x_0) , x_1 ويفضل ألا تكون قيمة x^* في الوسط.

نستخدم القاعدة الآتية للبحث عن قيمة (x) التي تعطي الحل الأمثل:

$$X_{i+1} = X_i - \frac{f'(x_i)}{\frac{f'(x_i) - f'(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}, i \geq 1 \qquad (7\text{-}2)$$

نتوقف عندما نرى بأن الحل صار مقنعاً، لنأخذ بعض الأمثلة:

<u>مثال:</u>

خذ المثال رقم (3) في الفقرة السابقة وهو

$$\min z = x^3 - 6x + 7$$

واستخراج قيمة x التي تقلل الدالة.

الجزء الثالث

<u>الجواب</u>

نستخرج في البداية:

$$f'(x) = 3x^2 - 6$$

ونختار قيمة ابتدائية لكل من x_0, x_1 ولتكن:

$$x_0 = 1\ ,\ x_1 = 2$$

الآن نطبق القاعدة مع ملاحظة أننا سنشرع بالحل ابتداءً من $i=1$:

$$x_2 = 2 - \frac{3(2)^2 - 6}{\dfrac{\left[3(2)^2 - 6\right] - \left[3(1)^2 - 6\right]}{2 - 1}}$$

$$= 2 - \frac{6}{6+3} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$x_3 = \frac{4}{3} - \frac{3(\frac{4}{3})^2 - 6}{\dfrac{\left[3(\frac{4}{3})^2 - 6\right] - \left[3(2)^2 - 6\right]}{\frac{4}{3} - 2}} = \frac{4}{3} - \frac{-\frac{2}{3}}{\dfrac{\frac{2}{3} - 6}{-\frac{2}{3}}} = \frac{4}{3} - \frac{-\frac{2}{3}}{\dfrac{-\frac{16}{3}}{-\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{4}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{3} + \frac{1}{12} = \frac{16+1}{12} = \frac{17}{12}$$

والآن نواصل الحل:

$$x_4 = \frac{17}{12} - \frac{3\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 6}{\dfrac{\left[3\left(\frac{17}{12}\right)^2 - 6\right] - \left[3\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 6\right]}{\frac{17}{12} - \frac{4}{3}}}$$

$$=\frac{17}{12}-\frac{\frac{1}{48}}{\frac{\frac{1}{48}-\left(-\frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{16}}}=\frac{17}{12}-\frac{\frac{1}{48}}{11}$$

$$=\frac{17}{12}-\frac{1}{528}=\frac{748-1}{528}=\frac{748}{528}=1.416$$

ومن ملاحظ ما توصلنا إليه في المرحلة الرابعة وهو(x=1.416) يبدو مقاربا لما توصلنا إليه بموجب طريقة (NRM) حيث كانت قيمة (x=1.414) وقد نكتفي بهذا القدر ولكن إذا واصلنا الحل فسنقترب من القيمة (1.414).

7-4-2 حل البرامج غير المقيدة ذات الأكثر من متغيرين

تناولنا البرامج غير المقيدة ذات المتغيرين أما البرامج التي تزيد متغيراتها عن ذلك فهناك عدة طرق لحلها وهي كثيرة نذكر منها طريقة الانحدار الشديد وطريقة نيوتن رافسن (The Newton Raphson Method) وهي امتداد للطريقة التي ذكرناها في الدالة غير المقيدة ذات المتغيرين وطريقة فلجر - بويل (Fletcher - Powell) طريقة شارك فيها فلجر مع ريفز (Powell – Fletcher) التي تقوم على أساس الميل المترافق وطريقة بويل (Powell) التي لا تتضمن أية مشتقات وطريقة مصفوفة المشتقات التي سنكتفي بتناولها من بين الطرق المذكورة أعلاه.

طريقة مصفوفة المشتقات:

وتتميز هذه الطريقة في اعتمادها على المشتقات التي تطرقنا إليها في الفصل الخامس وذلك بوضع هذه المشتقات على شكل مصفوفة فإذا أخذنا دالة لـ n من المتغيرات مثل:

$$f(x_1,x_2,...,x_n)$$

عند النقطة $x^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ بحيث تكون لدينا (n) من المشتقات الجزئية والتي تساوي صفراً وكما يأتي:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x^*}=0,\left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x^*}=0,\ldots,\left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_{x^*}=0 \qquad (7\text{-}3)$$

وبالإمكان وضع ذلك بصيغة محدد (Δ_n) للمشتقات الجزئية الثانية وكما يأتي:

$$\Delta_n \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \qquad (7\text{-}4)$$

ويسمى هذا المحدد بالمحدد الهيسي (Hessian determinant)

أما المحيددات الرئيسية (Principal minors)

$$\Delta_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2},\Delta_2=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

و

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \cdots \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} \qquad (7\text{-}5)$$

وتكون قيمة x^* التي نبحث عنها والتي تسمى بنقطة الاستقرار (stationary point) وبصيغة:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) \qquad (7\text{-}6)$$

إما:

نقطة عظمى موقعيه (local max.) إذا كانت:

$$\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots \qquad (7\text{-}7)$$

نقطة صغرى موقعية (local min.)

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \dots \qquad (7\text{-}8)$$

وإذا لم يتحقق واحد من هذه الشروط فلابد للدالة أن تفحص في منطقة نقطة الاستقرار.

ولابد من الإشارة هنا إلى أن الشروط التي تكلمنا عنها في الفقرة (4-5) من هذا الجزء من الكتاب المتعلقة بالدالة ذات المتغيرين ما هي الإحالة خاصة من الشروط أعلاه ذات المتغيرات العديدة أي الأكثر من متغيرين.

لنتناول مثالا إيضاحيا:

مثال:

حدد النهاية الصغرى أو العظمى أن وجدت في الدالة الآتية:

$$Z = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 - 4x_2 - 8x_1 - 2x_3 + 6$$

الجواب

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_3 - 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 + 2x_1 - 2$$

وإذا كانت: $\frac{\partial f}{\partial x_3} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0$ فإن:

الجزء الثالث

$$2x_1 + 2x_3 - 2 = 0$$

$$4x_1 + 2x_3 - 8 = 0$$

$$-2x_1 + 6 = 0$$

$$\therefore x_1 = 3$$

و

$$2x_3 + 2(3) - 2 = 0$$

$$x_3 = -2$$

$$x_2 = 2$$

أما الآن فستخرج المشتقات الجزئية الثانية وكما يلي:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_3} = 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} = 0$$

إذن:

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 0 = 8 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4(4-0) - 0(0-0) + 2(0-4)$$

$$= 16 - 8 = 8 > 0$$

وحيث أن:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$$

لهذا فان النقطة:

$$(x_1, x_2, x_3) = (3, 2, -2)$$

وهي نقطة نهاية صغرى موقعية للدالة (z) وتساوي:

$$Z = 2(3)^2 + (2)^2 + (-2)^2 + 2(3)(-2) - 4(2) - 8(3) - 2(-2) + 6$$

$$= 36 - 44$$

$$= -8$$

5-7 حل البرامج غير الخطية المقيدة Solution of Constrained (NLP)

7-5-1 حل البرامج غير الخطية المقيدة ذات المتغيرين

سبق وان تناولنا حل مثل هذه البرامج التي تحتوي على دالة هدف ذات متغيرين مثقلة بقيد وكل منها ذا متغيرين وقد استخدمت طريقة مضاعف لاكرانج ((Lagrange Multiplier لهذا الغرض راجع الفقرة (4-14-8) من هذا الجزء من الكتاب.

7-5-2 حل البرامج غير الخطية المقيدة ذات الأكثر من متغيرين

هناك طرق عدة لحل (CNLP) التي تحتوي على (n) من المتغيرات نستعرض منها طريقة مضاعفات لاكرينج لأنها أصبحت مألوفة لدينا في معالجة حل مثل هذه البرامج:

إذا أخذنا الدالة الآتية ذات (n) من المتغيرات:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

والمثقلة بالقيد:

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

والتي تكون فيها النقطة:

$$x^* = (x_1^* . x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

مستوفية لمتطلبات (n+1) من المعادلات وإذا ما تذكرنا مضاعفات لاكرانج فإن الحل يبدأ يكون حسب الصياغات الآتية:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

لاحظ أن في حالة $i = 1,2,...,n$ ، $\lambda = \frac{fxi}{gxi}$ و $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$

أما الخطوة الثانية فهي وضع المحدد والتالي:

$$\begin{vmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} & & g_{x_n} \\ g_{x_1} & f_{x_1x_1} - \lambda g_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} - \lambda g_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} - \lambda g_{x_1x_n} \\ g_{x_2} & f_{x_2x_1} - \lambda g_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} - \lambda g_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} - \lambda g_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{x_n} & f_{x_nx_1} - \lambda g_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} - \lambda g_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} - \lambda g_{x_nx_n} \end{vmatrix}$$

ويسمى هذا المحدد بالمحدد الهيسي المؤطر (Abordered Hession determinant) لكونه مؤطراً من جبهتين بالمشتقات الجزئية لدالة القيد f(g). ولأجل تحديد فيما إذا كانت النقطة $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ نقطة عظمى أم صغرى فلابد من تقييم المحددات الرئيسية والتي يبلغ عددها (n-1) وهي:

$$\Delta_{n+1} : \Delta_3 \Delta_4 ..., \Delta_{n+1}$$

عند: $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ ومن الملاحظ أن Δ_i يحتوي على الخط i والعمود i من Δ_{n+1}

وتكون النقطة $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$

نقطة عظمى إذا كان:

$$\Delta_3 > 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 > 0.... \quad (7\text{-}10)$$

نقطة صغرى إذا كان:

$$\Delta_3 < 0, \Delta_4 < 0, \Delta_5 < 0.... \quad (7\text{-}11)$$

وإذا لم يتحقق واحد من هذه الشروط فيتعين فحص الدالة في نقطة الاستقرار (stationary point) ومما تجدر الإشارة إليه أن النهاية العظمى والصغرى للدالة المقيدة ذات المتغيرين ما هي إلا حالة خاصة مما تناولناه أعلاه بمتغيرات عديدة.

والآن نحتاج لمثال إيضاحي:

$$\max \ Z = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_3$$

subject to

$$= x_1 + x_2 + x_3 = 23$$

الجواب

نصيغ مضاعف لاكرانج:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_3$$

والآن نستخرج المشتقات الجزئية وكما يأتي:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + x_2 - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -6x_2 + x_1 - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = -4x_3 + 1 - \lambda$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -x_1 - 2x_2 - x_3 + 45$$

وإذا كانت:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1},\frac{\partial F}{\partial x_2},\frac{\partial F}{\partial x_3},\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$$

إذن لدينا:

$$2x_1 + x_2 - \lambda = 0$$

$$x_1 - 6x_2 - \lambda = 0$$

$$-4x_3 + 1 - \lambda = 0$$

ومن المعادلة هذه المعادلات نحصل على:

$$\therefore 2x_1 - x_2 = x_1 - 6x_2 = 4x_3 + 1$$

ومنها نستخرج:

$$2x_1 - x_1 + x_2 - 6x_2 = 0$$

$$\therefore x_1 - 5x_2 = 0 \qquad \therefore x_1 = 5x_2$$

$$2(5x_2) + x_2 = -4x_3 + 1$$

$$11x_2 = -4x_3 + 1$$

$$4x_3 = 1 - 11x_2 \qquad \therefore x_3 = \frac{1-11x_2}{4}$$

إذن نستعين الآن بمعادلة القيد ونعوض فنحصل على:

$$5x_2 + x_2 + \frac{1-11x_2}{4} = 23$$

$$20x_2 + 4x_2 + 1 - 11x_2 = 92$$

$$13x_2 = 91$$

$$\therefore x_2 = \frac{91}{13} = 7$$

$$x_1 = 5(7) = 35$$

$$x_3 = \frac{1-11(7)}{4} = -19$$

$$\lambda = 2(35) + 7 = 77$$

والآن: نأخذ المشتقات الجزئية الثانية

$$f_{x_1x_1} = 2 \qquad f_{x_2x_2} = 6 \qquad f_{x_3x_3} = -4$$

$$f_{x_1x_2} = 1 \qquad f_{x_1x_3} = 0 \qquad f_{x_2x_3} = 0$$

$$g_{x_1} = 1 \qquad g_{x_2} = 1 \qquad g_{x_3} = 1$$

$$g_{x_1x_1} = 0 \qquad g_{x_2x_2} = 0 \qquad g_{x_3x_3} = 0$$

$$g_{x_1x_2} = 0 \qquad g_{x_1x_3} = 0 \qquad g_{x_2x_3} = 0$$

وبذلك يصبح بمقدورنا تكوين المحيددات الرئيسية وهي:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & g_{x_1} & g_{x_2} \\ g_{x_1} & f_{x_1x_1} - \lambda\, g_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} - \lambda\, g_{x_1x_2} \\ g_{x_2} & f_{x2x1} - \lambda\, g_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} - \lambda\, g_{x_1x_2} \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0(12-1) - 1(6-1) + 1(1-2) = -6$$

وبنفس الطريقة وبالاستناد إلى محدد هيسن نستنتج:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - [-24 + 4 + 0] + [-4 + 8 + 0] - [0 + 12 - 1]$$

$$\therefore \Delta_4 = 0 - 20 + 4 - 11 = -27$$

ومن النتائج يتبين أن:

$$\Delta_3 < 0 \ , \quad \Delta_4 < 0$$

وبذلك نستنتج أن النقطة (35 , 7 , -19) هي نقطة صغرى موضعية للدالة (z) والمقيدة بالقيد:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 23$$

7-6 البرامج التربيعية Quadratic Programming

يدعى البرنامج بالتربيعي إذا كانت دالة الهدف فيه تحتوي على حدود خطية إضافة إلى طاقم من القيود الخطية كما مبين في الصيغة الآتية:

$$(7\text{-}12) \qquad \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_{jk} x_j x_k$$

Subject to =

$$(7\text{-}13) \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i \qquad for \quad i = 1,2,\ldots,m$$

$$all \quad x_j \geq 0 \quad and \quad all \quad s_i \geq 0$$

أما طريقة حل هذا البرنامج فهي كما يلي:

لابد قبل الشروع باستعراض طريقة الحل من الإشارة إلى بعض الملاحظات المهمة بشان دالة الهدف وقد يكون من المفيد تناول مثال نتعقب من خلاله خطوات الحل والملاحظات المذكورة:

لنفترض بأن لدينا البرنامج الآتي:

$$z = 2x_1 + 5x_2 - \frac{1}{4}x_1^2 + 1x_1x_2 - 3x_1x_3 - 4x_2^2$$

من الملاحظ:

أ- إن بعض المتغيرات مثل x_1 , x_2 مرفوعة لقوة تربيعية.

ب- هناك بعض المتغيرات تجمعت على شكل أزواج كل زوج من حد من حدود الدالة، مثل x_1x_2 و x_1x_3.

ج- من الممكن إعادة صياغة دالة الهدف على شكل قالب يأخذ الهيئة الآتية ويحتوي على:

$$z = (0 + 1x_1 + \frac{5}{2}x_2 + 0x_3)1 \qquad (7\text{-}14)$$

$$+ (1 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3)x_1$$

$$+ (\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_1 - 4x_2 + 0x_3)x_2$$

$$+ (0 - \frac{3}{2}x_1 - 0x_2 + 0x_3)x_3$$

ويلاحظ أيضاً على دالة الهدف بالصيغة (7-14) ما يلي:

أ- إن العناصر القطرية (diagonal terms) ما هي إلا معاملات المتغيرات التربيعية في دالة الهدف (7-13) وهي (0 , -4 , $-\frac{1}{4}$).

ب- عناصر الأقطار الجانبية تساوي $\frac{1}{2}$ قيمة معاملات المتغيرات المقابلة في (7-13)

ج- إن الصف i متماثل مع العمود j فالعمود (1) يتكون من العناصر الآتية $(0 , \frac{5}{2} , 1 , 0)$ وهي نفسها عناصر الصف (1). وهكذا.

والآن دعنا نلاحظ المشتقات الجزئية للدالة (z) كما في الصيغة (7-13) والتي تظهر كما يلي:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 2 - \frac{1}{2}x_1 - 1x_2 = 2(1 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = 5 + 1x_1 - 8x_2 = 2(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_1 - 4x_2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = -3x_1 = 2(-\frac{3}{2}x_1) \qquad (7\text{-}15)$$

وعند التمعن في قيم المشتقات الجزئية للدالة (z) في (7-15) يلاحظ:

أ- إنها نفس قيم الدالة (z) (7-14) الموجودة داخل الأقواس مضروبة بـ (xi) مضروبة في (2).

ب- إن القيم الموجبة للمشتقات تشير إلى إمكانية زيادة قيمة الدالة بزيادة قيمة المتغير المرافق.

ج- إن المشتقات الجزئية هي دوال خطية لـ(xi) وهذا ما يساعدنا على الانتقال بالحل إلى الطريقة المبسطة (simplex) كما سنتابع ذلك بعد قليل.

لازلنا في مرحلة تثبيت الملاحظات والتهيئة لشرح طريقة الحل ومن هذه التهيئة نقوم بما يلي:

إن طريقة الحل تحتاج إلى إدخال متغيرات إلى المقادير بين الأقواس في (7-14) ونسميها المتغيرات الحرة (free variables) ولتوضيح ذلك دعنا ندخل متغيرا حرا مثل u إلى المقدار المضروب بـ x1 في (7-14) ويوضح أسلوب وهيكل هذا المتغير العلاقة المفاهيمية لهذا المتغير بالمقدار وكما يأتي:

$$\frac{1}{4}u = 1 - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 \qquad (7\text{-}16)$$

لاحظ أن اختيار معامل u كان بطريقة تسهل عملية التخلص من الكسور في المعادلة الجديدة (12-16) ولهذا نستطيع صياغتها كالآتي:

$$u = 4 - x_1 + 2x_2 - 6x_3$$

أو بعد إعادة الترتيب:

$$(7\text{-}17)\ x_1 = 4 - u + 2x_2 - 6x_3$$

نحذف المتغيرات xj واحدا بعد الأخر من المقادير التربيعية ونعوض بدلها بمقادير خطية تحتوي على متغيرات أخرى. وفي مثالنا نقوم بحذف x1 في (7-14) ونضع بدله الطرف الأيمن من (7-17) ويبدو ذلك كالآتي:

$$z = [0 + (4 - u + 2x_2 - 6x_3) + \frac{5}{2}x_2 + 0x_3]1$$

$$+[\ 1 - \frac{1}{4}(4 - u + 2x_2 - 6x_3) + \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3\ ]x_1$$

$$+[\ \frac{5}{2} + \frac{1}{2}(4 - u + 2x_2 - 6x_3) - 4x_2 + 0x_3\ ]x_2$$

$$+[\ 0 - \frac{3}{2}(4 - u + 2x_2 - 6x_3) + 0x_2 + 0x_3\ ]x_3$$

وبإعادة الصياغة ينتج:

$$z = (4 - u + \frac{9}{2}x_2 - 6x_3)1 \qquad (7\text{-}18)$$

$$+(0-\frac{1}{4}u+0x_2-x_3)x_1$$

$$+(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}u-3x_2-3x_3)x_2$$

$$+(-6+\frac{3}{2}u+3x_2-9x_3)x_3$$

ج - نعوض المقدار في المعادلة (7-17) ل x1 في المعادلة (7-18) ثم نقوم بتوسيع الناتج المستحصل حد بعد حد لكل عنصر من عناصر (7-17) وبعد ذلك نجمع مع الحدود الواقعة بين الأقواس في (7-18). وعلى سبيل المثال يكون الحد الثالث في المقدار الموسع:

$$(0+\frac{1}{4}u+0x_2+0x_3)2x_2$$

وبعد جمعه مع الحد الثالث بين الأقواس وهو:

$$(\frac{9}{2}-2u-3x_2-3x_3)$$

ينتج:

$$\left(\frac{9}{2}+Ou-3x_2-3x_3\right)$$

أما الناتج الكلي فهو:

$$z=(4-0u+\frac{9}{2}x_2-6x_3)1 \qquad (7\text{-}19)$$

$$(0-\frac{1}{4}u+0x_2+0x_3)u$$

$$(\frac{9}{2}+0u-3x_2-3x_3)x_2$$

$$(-6+0u-3x_2+9x_3)x_3$$

ويلاحظ أن المتغير الوحيد الذي حصل في معاملات المصفوفة هو في معاملات u التي أصبحت صفرا ماعدا المعامل الواقع في قطر المصفوفة وهو ($-\frac{1}{2}u$) وهذا قد يجعلنا نستغني عن العمليات الطويلة التي أجريناها في أعلاه ونكتفي بجعل معاملات (u) صفرا ماعدا العنصر الواقع في القطر.

كما يلاحظ أن المصفوفة الجديدة هي متناظرة أيضاً.

والآن ننتقل إلى طريقة الحل والتي تسمى طريقة السمبلكس لحل الدالة التربيعية:

تتلخص خطوات هذه الطريقة بالآتي:

الخطوة الأولى:

دع $s_i = b_i \geq 0 \;\; i = 1,2,\ldots\ldots, m$

ونرمز s_i إلى المتغيرات الإضافية (slack variables). وبذلك يتكون لدينا أول حل ممكن (initial feasible basic solution).

الخطوة الثانية:

نحدد اتجاهات الحل من خلال التحسن الذي نلاحظه في الحل الجاري ونتوقف عندما لا يوجد أي تحسن وبخلاف ذلك نواصل البحث عن الحل الأمثل وننتقل إلى الخطوة الثالثة.

الخطوة الثالثة:

نجري حسابات الحل الجديد ونعود إلى الخطوة الثانية ويبدو أن العمل يتركز في الخطوة الثانية فدعنا نشرحها بشكل مفصل:

أن هذه الخطوة تتطلب السير وفق النقاط الآتية:

نختار أي متغير حر (free variable) كي يدخل الحل وإذا كانت نتيجة المشتقة الجزئية المقابلة لدالة الهدف ليست صفراً (non zero).

إذا كانت المشتقات الجزئية للمتغيرات الحرة تساوي صفراً فعندئذ نختار متغيراً سواء كان xj أو si لأجل إدخاله والذي تكون نتيجة مشتقته الجزئية في دالة الهدف هي الأكثر إيجابية(most positive).

ننهي دورات الحل عندما تكون المشتقات الجزئية صفراً للمتغيرات الحرة أو اصغر أو تساوي صفراً للمتغيرات غير الأساسية الأخرى.

ونلاحظ هنا أن معيار السمبلكس التربيعية الأول مشابه إلى معيار السمبلكس الخطي الأول الذي تناولناه في الفصل الخامس من الجزء الأول من الكتاب حيث يشير المعياران إلى اتجاه تحسن الحل عندما يتم إدخال متغير غير أساسي إلى عمليات البحث عن الحل الأمثل.

أما سعة الخطوة التي تخطيها باتجاه الحل الأمثل فيحكمها إلى حد كبير معيار السمبلكس الثاني أيضا فهو يهدينا إلى اكبر قيمة للمتغير غير الأساسي الذي يبقي على الإمكانيات المتاحة الواردة في القيود.

ولكن في نفس الوقت نكتشف قيمة هذا المتغير التي يؤدي إلى تناقص دالة الهدف. ولهذا فان السعة المثلى لخطوة الحل هي اصغر هاتين القيمتين. قد تبدو هذه القاعدة غير واضحة إذن نحتاج لمواصلة شرح طريقة الحل حيث سيساعد ذلك على تبسيط ما قلناه ونحتاج هنا لنتناول مثال:

مثال:

$$\max z = 6x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_1^2 - 2x_2^2 - \frac{1}{3}x_3^2 \qquad (7-20)$$

بشرط أن:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 5 = 4 \qquad (7-21)$$

$$x_j \geq 0 \ , s \geq 0$$

والآن نشرع في الحل:

نعيد كتابة دالة الهدف على غرار (7-14) لينتج:

$$(\ + 3x_1 + 2x_2 + 1x_3\ )\ 1$$

$$+(3 - 3x_1 \qquad\qquad)\ x_1 \qquad (7-22)$$

$$+(2 \quad -2x_2 \quad)\ x_2$$

$$(1 \quad -\frac{1}{3}x_3)\ x_3$$

ويلاحظ أن القيم الصفرية حذفت من هذه الصيغة لغرض التبسيط. كما نتذكر بان القيم الموجودة داخل هذا القالب هي نصف القيم التي تحتويها المشتقات الجزئية للمتغيرات المقابلة (راجع 7-15)

والآن أي متغير سيدخل عمليات الحل ؟

نعود إلى الفقرة (ب) من الخطوة الثالثة ونقول بان x1 هو الذي سيدخل عمليات الحل.

ولأجل إيجاد قيمة x1 نطبق أولاً الأسلوب المتبع في معيار السمبلكس الثاني لغرض حساب القيمة العظمى ل x1 والتي تنسجم مع الإمكانيات الفاعلة في القيد. أن هذا يتطلب استخراج النسب للقيم الجارية للجهة اليمنى من القيد إلى معاملات المتغير الداخل. وفي مثالنا يبدو ذلك كما يلي:

حيث لدينا قيد واحد أذن:

$$x_1 \leq \text{القيمة الجارية للقيد} = \frac{4}{1} = 4 \qquad (7-23)$$

معامل x_1

وهذه تمثل سعة الخطوة التي تفي بمتطلبات الإمكانيات الفاعلة للقيود.

أن قيمة x1 تعطي الحد الأعلى للتحسينات الممكنة حالياً في دالة الهدف مع بقاء كل المتغيرات غير الأساسية على مستوياتها الجارية لاحظ أن:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 \ \text{أو بشكل مرادف لـ}\ \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 \qquad (7-24)$$

حيث أن المشتقة الجزئية تحسب لقيمة الحل التجريبي الجاري أن هذه المعادلة تعطي:

$$3-3x_1=0$$

ومنها نستخرج:

$$(7-25) \qquad x_1 \le \frac{3}{3}=1$$

وهي سعة الخطوة التالية التي تؤدي إلى تحسين قيمة دالة الهدف.

وتعتبر المتباينة (7-25) أكثر تقييداً من المتباينة (7-23) حيث تشير إلى أن x1 سيدخل عمليات الحل بقيمة مقدارها (1) فقط وهذا ما يؤهلها للانتقال إلى الخطوة الثالثة. حيث يمكن بلوغ $x_1 = 1$ في الحل التجريبي التالي بمجرد إضافة معادلة تعريفية للمتغير الحر مرافقة للمتغير x1 كما مبين أدناه:

$$3u_1=3-3x_1$$

أو بشكل مرادف لـ

$$(7-26) \qquad x_1+u_1=1$$

وفي الحل الجاري يلاحظ أن: u1 =1 مادام x1 = 0 ولكن عند استخدام المحورية (pivoting) فأن u1 يصبح غير أساسي ويهبط إلى مستوى الصفر وبذلك يرفع المتغير إلى القيمة (1) وبمعنى آخر:

الفصل السابع

إذا راصفنا العلاقة (7-26) مع القيد في الحالة (7-26) ويكون المحور x1 في المتباينة (7-26) نحصل على القيود الآتية:

$$(7-27) \qquad 2x_2+x_3+s-u_1=3$$

$$x_1+u_1=1$$

نحذف x1 في دالة الهدف (7-22) وذلك بتعويضها بالعلاقة في (7-26) فينتج:

$$\begin{aligned}(7-28) \qquad &(3 \quad +2x_2 \quad +1x_3\ )1\\ &+(\ \ -3u \qquad)u_1\\ &+(2 \quad -2x_2 \qquad)x_2\\ &+(1 \qquad -\frac{1}{3}x_3)x_3\end{aligned}$$

دعنا نتذكر بأنه لازال كل مقدار في داخل الأقواس يمثل $\frac{1}{2}$ قيمة المشتقة الجزئية للمتغيرات غير الأساسية المقابلة. ولكن يتعين الآخذ بالحسبان أن تحريك أي متغير يؤثر على z(x) من خلال التغيرات المرافقة في المتغيرات الأساسية. وتسمى هذه الحالة أحيانا بالمشتقة الجزئية المصغرة.

(انتهت الخطوة الأولى) وأعطتنا:

القيمة التي مقدارها (3) في أعلى يسار العلاقة (7-28) والتي تساوي قيمة دالة الهدف في الحل التجريبي الجاري.

والآن نعود إلى الخطوة الثانية:

ونلاحظ بان الحل يمكن تحسينه بإدخال x2. أما قيود الإمكانيات وفقاً (7-27) فهي $x_2 \le \frac{3}{2} = 1.5$ ويمكن التحقق من أن القيمة التي نعطيها لـ x_2 والتي تعطي أفضل تحسن في دالة الهدف هي:

x2 = 1 أيضاً ولأجل إكمال الخطوة الثالثة ندخل متغيراً حراً آخر وكما يلي:

$$2u_2 = 2 - 2x_2$$

وهذا مرادف لـ $x_2 + u_2 = 1 \qquad (12-29)$

ويجمع (7-29) مع (7-27) للحصول على:

الصف 1 $x_3 + 5 - u_1 - 2u_2 = 1$

الصف 2 $x_1 \qquad + u_1 \qquad = 1 \qquad (7-30)$

الصف 3 $x_2 \qquad + u_2 = 1$

وباستخدام (7-29) لأجل حذف x2 من (7-28) نحصل على دالة الهدف المختصرة وكما مبين في أدناه:

$$(5 \qquad + 1x_3\ )1$$

$$+(\ -3u_1 \qquad)u_1 \qquad (7-31)$$

$$+(\quad -2u_2 \quad)u_2$$

$$+(\quad -\frac{1}{3}x_3)x_3$$

وباستخدام (7-29) لأجل حذف x_2 من (7-28) نحصل على دالة الهدف المختصرة وكما مبين في أدناه:

$$(5 \quad)1 \quad (7\text{-}31)$$

$$+ \ (\quad -3u_1 \quad)u_1$$

$$+ \ (\quad -2u_2 \quad)u_2$$

$$+ \ (\quad -\frac{1}{3}x_3)x_3$$

ويلاحظ في كلاً (7-28) و (7-31) أن الحد الأول داخل الأقواس المرافق للمتغيرات الحرة u_1, u_2 يساوي صفر. وعلى هذا الأساس فأن المشتقة الجزئية لدالة الهدف الانتقالية في كل من (7-28) و (7-31) ولكل متغير حر تساوي صفر في هذه الحلول التجريبية. والآن: يشير الفرع (ب) من المعيار الأول الوارد في الخطوة الثانية إلى أن المتغير x_3 يدخل في عمليات الحل. ولأجل أنجاز حساب سعة الخطوة نجد أن حسابات الإمكانيات المستندة إلى (7-30) محددة. ولهذا في هذه الحالة نقوم بأجراء تغييرات في الخطوة الثالثة وتشمل هذه التغييرات مواقع المتغيرات الموجدة في عمليات الحل وهي: أن x_3 سيدخل هذه العمليات ويغادر s مادام x_1 لا يظهر إلا في الصف (1) للعلاقة (7-30). ولا تحتاج هنا لإجراء حسابات المحور في القيود ولكن لو كان هناك أكثر من قيود هذه المسألة التي نحن بصددها لنشأت الحاجة لإجراء حسابات المحور.

الفصل السابع

والآن سنقوم بحذف x_3 من (7-31) بواسطة الصف (1) في العلاقة (7-30) لتحصل على:

$$\left(6\frac{2}{3}+\frac{2}{3}u_1+\frac{4}{3}u_2-\frac{2}{3}s\right)1 \quad (7\text{-}32)$$

$$+\left(\frac{2}{3}-\frac{10}{3}u_1-\frac{2}{3}u_2+\frac{1}{3}s\right)u_1$$

$$+\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}u_1-\frac{10}{3}u_2+\frac{2}{3}s\right)u_2$$

$$+\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}u_1+\frac{2}{3}u_2-\frac{1}{3}s\right)s$$

ويبدو أن الحل التجريبي الجاري هو:

$$x_1=1\ ,\ x_2=1\ ,\ x_3=1 \qquad (7-33)$$

ومن ذلك نستنتج أن المتغيرات الثلاثة جميعها عند مستوى القيم الموجبة فهل هذا هو الحل الأمثل ؟ وللإجابة على هذا السؤال نقول بالنفي وفقاً لما يقرره الفرع (أ) من المعيار الأول. و لأجل توضيح ذلك نعود إلى العلاقة (7-26)= (7-29) المرافقة لكل من u1= u2 والتي فرضت على المسالة كبدعة لأجل التأكد من سعة الخطوة المثلى التي نحتاجها في تطبيق المعيار الثاني. ولهذا لا يوجد أي سبب لتكون قيمة كل من (u1, u2) صفراً في حين هما غير مقيدين في الإشارة ولهذا سميناها بالمتغيرات الحرة. وكنتيجة لذلك إذا كانت المشتقة الجزئية لدالة الهدف للمتغير الحر = ليست صفراً وعندها يمكن تحسين الحل من خلال التحرك بالمتغير موضوع البحث بالاتجاه المناسب مسترشدين بإشارة المشتقة الجزئية. وكما نلاحظ في (7-32) فان المشتقات الجزئية لكل من u1, u2 هي ليست صفراً ولهذا نختار u1 لأجل دخول عمليات الحل.

والآن مادامت المشتقة الجزئية لـ u1 موجبة لهذا نزيد من قيمة u1 ويكون طريق البحث عن مستوى جديد لـu1 هو نفس الطريق الذي سلكناه في الخطوات السابقة (أي دورات الحل السابقة) وإذا كانت قيمة المشتقة الجزئية سالبة فان ذلك يستوجب اختبار القيود في (7-30) لأجل التحقق عن الكيفية التي جاءت بها القيمة السالبة دون خرق متطلبات القيود. أن هذا مرادف لاختبار مدى الكبر الذي تبلغه (-u1).

إن قيمة u1 التي تعطي أعلى قيمة تحسينية في دالة الهدف (مع بقاء كل قيم المتغيرات غير الأساسية على مستوياتها الحالية) أن القيمة المطلوبة

لـ u1 هي $u_1 = \frac{2}{10}$ والتي هي ناتج ما يأتي:

عند الحل التجريبي الجاري:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial u_1} = (\frac{2}{3} - \frac{10}{3}u_1) = 0 \qquad (7-34)$$

$$\therefore 10u_1 = 2 \quad , u_1 = \frac{2}{10}$$

ولهذا ومن اجل التأكد من أن $u_1 = \frac{2}{10}$ ستدخل عمليات الحل التجريبي التالية لهذا يجب

إدخال متغير حر جديد هو u3وكما يأتي:

$$\frac{10}{3}u_3 = \frac{2}{3} - \frac{10}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_2 + \frac{1}{3}s \qquad (7-35)$$

وهو مرادف:

الفصل

$$-\frac{1}{10}s + 1u_1 + \frac{1}{5}u_2 + 1u_3 = \frac{1}{5} \qquad (7-36)$$

السابع

وباستخدام العلاقة (7-36) لأجل حذف u1 من العلاقة (7-30) فينتج:

الصف 1 $\quad x_3 \quad + \frac{9}{10}s - \frac{9}{5}u_2 + u_3 = \frac{6}{5}$

الصف 2 $\quad x_1 \quad + \frac{1}{10}s - \frac{1}{5}u_2 - u_3 = \frac{4}{5} \qquad (7-37)$

الصف 3 $\quad x_2 \quad + u_2 = 1$

ويتم حذف u1 من العلاقة (7-32) فينتج:

$$(6\frac{4}{5} \qquad + \frac{6}{5}u_2 - \frac{3}{5}s\ ) \qquad (7-38)$$

$$+(\ -\frac{10}{3}u_3 \qquad\qquad)u_3$$

$$+(\frac{6}{5} \qquad -\frac{16}{5}u_2+\frac{3}{5}s)u_2$$

$$+(-\frac{3}{5} \qquad +\frac{3}{5}u_2\ -\frac{3}{10})s$$

ومادام u1 أصبح متغيراً أساسيا في (7-36) وهو غير مقيد من حيث الإشارة لهذا لا يمكن أن نخرجه كي يكون غير أساسي وعليه فإن (7-36) يمكن إسقاطها في الدورات اللاحقة لعمليات الحل وستكون قيود الحل هي (7-37).

وعلى العموم مادام المتغير الحر قد دخل عمليات الحل فان العلاقة المقابلة يمكن إسقاطها وهذا يعني أن عدد القيود لا يجوز أن تزيد عن (m ×n) فلو افترضنا أن جميع s_i, x_i أصبحت متغيرات أساسية لذلك تصبح لدينا $(m \times n)$ من القيود ولهذا فان أي متغير غير أساسي ينبغي أن يكون متغيراً حراً.

بعد أن تم اختيار واحد من تلك المتغيرات لدخول عمليات الحل ليصبح متغيراً أساسيا فان واحداً من حالتين ستظهر ولهما:

أما s_i أو x_i يجب أن يصبح غير أساسي وبهذا يجب إسقاط الصف الذي اختير فيه المتغير الحر ليكون أساسيا وفي هذه الحالة يختصر عدد القيود بقيد واحد.

أما الحالة الثانية فان المتغير الحر الموافق للقيد التعريفي المفروض حديثا" بالعمليات الجارية يجب أن يصبح غير أساسي ولهذا يجب إسقاط هذه العلاقة بعد إجراء عملية المحور على المتغير الحر الذي يتم اختياره وفي هذه الحالة يكون عدد القيود ثابتاً.

والآن وبعد هذه الملاحظة الطويلة حول عدد القيود نعود إلى الخطوة الثانية من خطوات الحل والتي تستوجب إدخال u_2 إلى عمليات الحل مادامت مشتقتها الجزئية في العلاقة (7-38) موجبة فنحصل على:

$$\frac{16}{5}u_4=\frac{6}{5}-\frac{16}{5}u_2+\frac{3}{5}s \qquad (7\text{-}39)$$

وبعد حذف u_2 من (7-37) ينتج:

$$\text{الصف 1} \quad x_3 + \frac{9}{16}s + u_3 + \frac{9}{5}u_4 = \frac{15}{8}$$

$$\text{الصف 2} \quad x_1 + \frac{1}{16}s - u_3 + \frac{1}{5}u_4 = \frac{7}{8}$$

$$\text{الصف 3} \quad x_2 + \frac{3}{16}s - u_4 = \frac{5}{8}$$

ويحذف u_2 من العلاقة (7-38) نحصل على:

$$\left(\quad 7\frac{1}{4} \qquad\qquad\qquad \right)$$

$$\left(\qquad -\frac{10}{3}u_3 \qquad\qquad \right)u_3$$

$$\left(\qquad\qquad -\frac{16}{5}u_4 \qquad \right)u_4$$

$$\left(\quad -\frac{3}{8} \qquad\qquad -\frac{1}{6} \quad \right)s$$

والآن وعند الخطوة الثانية يمكن أن نتوقف دورات الحل ويكون الحل الأمثل هو:

$$x_1 = \frac{7}{8},\ x_2 = \frac{5}{8},\ x_3 = \frac{15}{8},\ z = \frac{58}{8}$$

هذا ويمكن أجراء هذه العمليات وفق جدول أشار إليه بيل (Beale) والذي تنسب إليه الطريقة التي تتبعنا خطواتها واحدة بعد الأخرى ويمكن مراجعة هذه الجدولة في المصادر المختصة حيث يضيق المجال هنا التطرق إليها.

تمارين (7-1)

1- جد ما يأتي:

$$min \quad z = x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$$

subject to:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 10$$

2- إذا كانت لدينا دالة الهدف الآتية:

$$z = x_1^2 + x_2 + 2x_3^2$$

وكان القيد المفروض على هذه الدالة هو:

$$2x_1 - x_3 \leq 12$$

جد قيمة كل من (x_1, x_2, x_3)التي تعظم هذه الدالة.

3- تعمل أحد المصانع وفق دالة التكاليف غير المقيدة الآتية:

$$z = 10 - 3x + 2x^3$$

فما هي قيمة (x) التي تؤدي إلى إقلال هذه الدالة. أستخدم أي من الطريقتين نيوتن- رافسن أو ريكولا- فالسي.

4- ما هي قيمة كل من (x_1, x_2, x_3) التي تعظم الدالة الآتية:

$$z = 8 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - x_3 - 3x_1 - 5x_2$$

أستخدم طريقة مصفوفة المشتقات في الحل.

5- وضع جهاز تخطيط الإنتاج في أحد المشاريع دالة الإنتاج غير الخطية الآتية:

$$z = x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2 + x_1x_3$$

ووضع القيد الأتي على هذه الدالة:

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16$$

والمطلوب إيجاد أعظم قيمة تبلغها (z).

المصــادر

1- Alexander Schrijver, (Theory of Linear and Integer Programming), 1998.

2- Ales Cerny (Mathematical Techniques in Finance) ,2009.

3- Angel de la Fuente ,(Mathematical Methods and Models for Economists) ,2000.

4- Adam Ostaszewski, (Mathematics in Economics), 1993.

5- Akira Takayama,(Mathematical Economics) , 1985.

6- Avriel, Mordecai, (Nonlinear Programming: Analysis and Methods) ,2003.

7- Bôcher, Maxime,(Introduction to higher algebra),2004.

8- Bernd Gärtner, Jiří Matoušek , (Understanding and Using Linear Programming,) 2006.

9- Bretscher, Otto ,(Linear Algebra with Applications (3rd ed.), Prentice Hall), 2005.

10- Bôcher, Maxime, (Introduction to higher algebra), 2004.

11- Baldani, James Bradfield, Robert Turner, (Mathematical Economics) , 2004.

12- Bazaraa, Mokhtar S. and Shetty, C. M. (Nonlinear programming. Theory and algorithms),1979.

13- Bretscher, Otto, (Linear Algebra with Applications (3rd ed.)), 2005.

14- Bertsekas, Dimitri P. (Nonlinear Programming: 2nd Edition), 1999.

15- Conrey, J. B.,(Ranks of elliptic curves and random matrix theory), 2007.

16- Christopher Clapham, James Nicholson, (The Concise Oxford Dictionary of Mathematics), 2005.

17- Cliff Huang, Philip S. Crooke, (Mathematics and Mathematica for Economists) ,1997.

18- Carl P. Simon, Lawrence Blume, (Mathematics for Economists) ,1994.

19- Morris C, Thanassoulis E ,(Essential Mathematics),1994.

20- Dimitri P. Bertsekas,(Nonlinear Programming: 2nd Edition),2004.

21- D. Zwillinger, (Handbook of Differential Equations ,3rd edition), 1997.

22- David Bailey ,(Mathematics in Economics) ,1998.

23- Dean Corbae, Maxwell B. Stinchcombe, Juraj Zeman ,(An Introduction to Mathematical Analysis for Economic), 2009.

24- Darrell A. Turkington (Mathematical Tools for Economics),2006.

25- E.L. Ince, (Ordinary Differential Equations), 1956 .

26- Edward T. Dowling, (Schaun's Outline of Introduction to Mathematical Economics) ,2000.

27- F. M. Wilkes, (Mathematics for Business) ,1999.

28- Godsil, Chris; Royle, Gordon,(Algebraic Graph Theory, Graduate Texts in Mathematics), 2004.

29- Geoff Renshaw (Maths for Economics), 2008.

30- Ian Jacques.(Mathematics for Economics and Business, Fifth Edition/ Difference Equations.), 2006.

31- Ian Jacques, (Mathematics for Economics Plus Mathxl Pack) ,2009

32- Jeffrey Baldani, James Bradfield, Robert Turner, (Mathematical Economics) ,2004.

33- Jon Curwin, Roger Slater ,(Improve Your Maths: A Refresher Course), 1999.

34- Jean Soper.,(Mathematics for Economics and Business: An Interactive Introduction), 2004.

35- Kenneth S. Miller, (Linear difference equations.), 1968.

36- Ken Binmore, Joan Davies, (Calculus: Concepts and Methods), 2002.

37- Ken Holden, Alan Pearson, (Introductory Mathematics for Economics and Business) ,1992.

38- Knut Sydsaeter, Peter Hammond, (Essential Mathematics for Economic Analysis) ,2002.

39- Lang, Serge,(Algebra, Graduate Texts in Mathematics), 2002.

40- Larson, Ron, Bruce H. Edwards,(Calculus,9th ed.), 2009.

41- Leighton Thomas .,(Using Mathematics in Economics) , 1999.

42- Martin Grötschel,(Linear and Integer Programming) 2006.

43- Mark de Berg, Marc van Kreveld, and Others,(Linear Programming, Computational Geometry),2000.

44- Michael J. Todd, (The many facets of linear programming, Mathematical Programming) ,2002

45- McQuarrie, Donald A. ,(Mathematical Methods for Scientists and Engineers), 2003.

46- Martin Anthony, (Mathematics for Economics and Finance), 1996.

47- Michael W. Klein ,(Mathematical Methods for Economics), 2002.

48- . M.J. Rosser, (Basic Mathematics for Economists) ,2003.

49- Mik Wisniewski ,(Introductory Mathematical Methods in Economics) ,1996.

50- Mik Wisniewski, (Quantitative Methods for Decision Makers) ,2002.

51- Martin Grötschel,(Linear and Integer Programming) ,2006.

52- Mark de Berg, Marc van Kreveld, and Others,(Linear Programming, Computational Geometry)2000.

53- Malcolm Pemberton, Nicholas Rau .,(Mathematics for Economists) , 2006.

54- M.J. Rosser .,(Basic Mathematics for Economists) , 2003.

55- Nocedal, Jorge, , Stephen J., (Numerical Optimization (2nd ed.), 2006.

56- Paul M. Batchelder,(An introduction to linear difference equations), 1967.

57- Peter Kahn, (Studying Mathematics and Its Applications), 2001.

58- Peter Temple, (First Steps In Economic Indicators) ,2002.

59- Rangarajan K. Sundaram, (A First Course in Optimization Theory) ,1996.

60- Rebecca Taylor, Simon Hawkins, (Mathematics for Economics and Business), 2008.

61- Rowen, Louis Halle, (Graduate Algebra), 2008.

62- Stewart , James, (Calculus: Early Transcendentals,6th ed) ,2008.

63- Steve Greenlaw ,(Doing Economics) ,2005.

64- Sheldon M. Ross, (An Elementary Introduction to Mathematical Finance),2002.

65- Shayle R. Searle, Lois Schertz Willett, (Matrix Algebra for Applied Economics) ,2001.

66- Stinson, Douglas R. (Cryptography, Discrete Mathematics and Its Applications), 2005.

67- Thomas, George B., Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano (Calculus,11th ed),2008.

68- Teresa Bradley ,(Essential Mathematics for Economics and Business) ,2008.

69- V. Chandru and M.R.Rao,(Linear Programming), 1999.

70- Wolfram, Stephen,(The Mathematical Book/5th ed),2003.

71- Zabrodin, Anton; Brezin, Édouard; Kazakov, Vladimir; Serban, Didina; Wiegmann, Paul,(Applications of Random Matrices in Physics),2006.